

AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA DE ESTRUTURAS EXISTENTES

BRUNO MIGUEL VERÍSSIMO DE PEREIRA LOPES

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

Orientador: Professor Doutor António Abel Ribeiro Henriques

JUNHO DE 2009

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2008/2009

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2008/2009 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2009*.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

Aos meus Pais

“Um homem nunca sabe aquilo de que é capaz até que o tenta fazer.”

Francis Bacon

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, ao Professor Abel Henriques pelo acompanhamento empenhado e conhecimentos transmitidos, tendo suscitado em mim o interesse pela área da fiabilidade estrutural, ainda tão pouco explorada.

Na realização desta dissertação foi, também, importante a ajuda do Professor Francisco Calheiros, sempre disponível para o esclarecimento de dúvidas na área de estatística e na interpretação dos resultados.

Aos meus Pais e Irmão, pelo apoio constante e frequente incentivo na realização desta dissertação, tal como a toda a família que directa ou indirectamente contribuiu para a minha formação.

Aos colegas e amigos Daniel Amaral e Nelson Fernandes, pela troca de ideias e opiniões, tal como pela ajuda na concretização deste trabalho.

Aos restantes amigos e Equipa que, não sendo possível referenciá-los, me ofereceram apoio e momentos de descontração.

Por fim, agradeço em especial à Raquel, por toda a paciência, apoio e encorajamento nos momentos difíceis.

RESUMO

O atingir o tempo de fim de vida útil de projecto, a alteração do uso, inadequação das acções à realidade e a apresentação de severa deterioração, são apenas alguns dos factores que tornam a necessidade de avaliar a segurança de estruturas existentes uma realidade cada vez mais frequente. Este aumento dos processos de avaliação tornou visível a inadequação dos regulamentos de projecto para a execução da avaliação de segurança de uma estrutura existente. Desta forma, houve a necessidade de explorar e implementar novas metodologias vocacionadas principalmente para estes processos de avaliação.

Assim este trabalho tem como objectivo apresentar ao leitor os principais aspectos inerentes a este processo de avaliação, os seus conceitos e incertezas. Apresenta também as diferenças para com o processo de projecto de uma estrutura nova. Culminando a primeira parte do trabalho, na apresentação da metodologia que se entendeu como a mais apropriada para a realização destes procedimentos. A metodologia proposta por BRIME (2001) e COST345 (2004) e consiste numa filosofia de cinco níveis de avaliação com um nível crescente de complexidade e um nível decrescente de conservatividade. Onde o avaliador passará para o nível seguinte de avaliação quando a estrutura em análise não verifique os critérios estabelecidos no nível anterior. Este crescimento de complexidade na avaliação termina no quinto nível de avaliação onde se realiza uma análise de fiabilidade que emprega metodologias probabilísticas.

Este ponto transporta-nos para a segunda parte desta dissertação, onde são apresentados os conceitos básicos de estatística e é introduzida a fiabilidade estrutural. Os seus fundamentos e a definição do parâmetro, que em última análise quando comparado com valores de referência, determina o nível de segurança da estrutura, este é o índice de fiabilidade, β . Expostas as bases, foram apresentados e comparados dois métodos passíveis de ser empregues na execução deste tipo de análises, nomeadamente o principal método de referência, o método de simulação de Monte Carlo, e um método, baseado no anterior mas empregando uma técnica de amostragem estratificada, o do Hipercubo Latino. O processo comparativo foi efectuado aplicando os dois métodos a um exemplo simples, uma viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniforme. Deste processo, tal como era espectável, confirmou-se a maior eficiência (menor esforço computacional) para o mesmo nível de precisão, que o método do Hipercubo Latino apresenta.

Baseado, nesta comparação e na confirmação do método do Hipercubo Latino ser a metodologia probabilística mais adequada, conjuntamente com a metodologia exposta dos cinco níveis de avaliação, apresenta-se um exemplo que consiste na avaliação da segurança numa passagem superior sobre uma linha ferroviária. Neste exemplo, de forma a mostrar as potencialidades de empregar metodologias probabilísticas apenas foram verificados os níveis 1 e 5 do procedimento de verificação, sobre a ponte sem anomalias e com anomalias. Estas anomalias simuladas foram a total deterioração da camada inferior da armadura ordinária e a deterioração parcial do pré-esforço. Deste modo, foi possível verificar a potencialidade da aplicação dos métodos probabilísticos, pois estes tornam possível classificar estruturas como seguras, quando apenas empregando métodos semi-probabilísticos (tais como os dos regulamentos) eram consideradas inseguras.

PALAVRAS-CHAVE: Estruturas de Betão, Análise de Segurança, Análise de Fiabilidade, Métodos de Simulação, Método do Hipercubo Latino.

ABSTRACT

The coming to an end of a project's utility, the alteration of its use, inadequateness of its actions towards reality and the presentation of severe deterioration, are some of the factors that make it absolutely necessary to evaluate the security of existing structures an ever more frequent reality. This increase in evaluation processes made the inadequateness of project regulations used to evaluate structure safety in existing structures ever more evident. Hence, a need to explore and implement new methods directed primarily to these evaluation processes.

Therefore, this work's main goal is to present to the reader the principal aspects involved with this evaluation process, including its concepts and uncertainties. It will also touch upon the differences concerning the project process involving new structures. In the first part of this work you will encounter the methodology that was considered to be most appropriate for the conclusion of these proceedings. The methodology suggested by BRIME (2001) and COST345 (2004) consists of a philosophy composed by five levels of evaluation with an increasing level of complexity and a decreasing level of conservativity. The evaluator will move on to the following level as long as the analyzed structure does not validate the criteria found in the level previously mentioned. This increase of complexity of the evaluation ends upon arriving at the fifth level of evaluation where a reliability analysis is then done through the use of probabilistic methods.

This leads us to the second part of this dissertation, where basic statistical concepts are presented and where the structural reliability is introduced. Its fundamentals as well as its parameters, which in a last analysis when compared with target values determine the level of the structural safety is the reliability index, β . Once the basics are introduced, two possible methods of execution of this type of analysis were introduced and compared, namely the principal method of reference, the Monte-Carlo simulation method and another based on the previous but which uses a technique that requires stratification sampling, the Latin Hypercube. The comparative procedure was done by applying both methods to a simple example, a simply restrained beam subjected to uniform load. Through this process, as expected, the most efficient (with less computational effort) for the same level of precision, was the Latin Hypercube method.

Based on this comparison and confirmation that the Latin Hypercube method is the most adequate, along with the five levels of evaluation, a case study was executed, the assessment of an overpass over a railway. In the example given, to show the potentiality of using probabilistic methodologies only levels 1 and 5 of the verification procedure were verified, on the bridge with and without deterioration. These simulated abnormalities were the total deterioration of the inferior reinforcing bars and the partial deterioration of the prestressing strands. By these means, the appliance of the probabilistic methods made possible to verify the potentiality of the application proving the structural safety, whereas only using semi-probabilistic methods (like those of regulations) was considered unsafe.

KEYWORDS: Concrete Structures, Safety Analysis, Reliability Analysis, Simulation Methods, Latin Hypercube Method.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	v
 1. INTRODUÇÃO	 1
1.1. ENQUADRAMENTO E OBJECTIVOS DA DISSERTAÇÃO	1
1.2. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	2
 2. AVALIAÇÃO DE ESTRUTURAS EXISTENTES	 3
2.1. INTRODUÇÃO	3
2.2. PRINCÍPIOS DA AVALIAÇÃO DE SEGURANÇA	4
2.2.1. INCERTEZAS NA AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA ESTRUTURAL	4
2.2.2. AVALIAÇÃO VERSUS PROJECTO	5
2.2.3. MÉTODOS DE VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA	6
2.2.4. ANÁLISE DETERMINÍSTICA VERSUS ANÁLISE PROBABILÍSTICA	7
2.3. METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO	9
 3. CONCEITOS DE ESTÍSTICA E INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE FIABILIDADE	 11
3.1. INTRODUÇÃO	11
3.2. FUNDAMENTOS ESTATÍSTICOS	11
3.2.1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	11
3.2.2. FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	15
3.3. INTRODUÇÃO À FIABILIDADE ESTRUTURAL	15
3.3.1. ESTADOS LIMITE E DEFINIÇÃO DE FIABILIDADE	15
3.3.2. FUNDAMENTOS	16
3.3.3. DEFINIÇÃO DO ÍNDICE DE FIABILIDADE	17
3.4. MÉTODOS DE ANÁLISE DE FIABILIDADE E ABORDAGEM COMPUTACIONAL DE PROBLEMAS	19
3.4.1. GENERALIDADES	19
3.4.2. MÉTODOS DE SIMULAÇÃO	19
3.4.2.1. Simulação de Monte Carlo	20

3.4.2.2. Método do Hipercubo Latino	22
3.5. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE – FILTRAGEM DE VARIÁVEIS.....	23
3.6. VERIFICAÇÃO DA SIMULAÇÃO. TESTE DE HIPÓTESES.	27
3.7. EXEMPLO DE APLICAÇÃO.....	30

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO – AVALIAÇÃO DE UMA PASSAGEM SUPERIOR..... 51

4.1. INTRODUÇÃO	51
4.2. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA	51
4.3. DADOS GEOMÉTRICOS E MATERIAIS.....	53
4.4. ACÇÕES	55
4.5. ANÁLISE DE FIABILIDADE	57
4.6. CONCLUSÃO	82

5. CONCLUSÃO..... 85

5.1. INTRODUÇÃO	85
5.2. CONCLUSÕES FINAIS.....	85
5.3. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	87

BIBLIOGRAFIA..... 89

ANEXOS..... 95

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2.1 – Fundamentos da análise de risco (adaptado de Haldar e Mahadevan, 2000a).	8
Fig. 3.1 – FDP e FD de uma variável contínua aleatória (adaptado de Haldar e Mahadevan, 2000a).	12
Fig. 3.2 – Função densidade de probabilidade de uma distribuição normal (Melchers, 1999).	14
Fig. 3.3 – Função densidade conjunta de duas variáveis $f_{R,S}(r,s)$, funções densidade probabilidade marginal $f_R(r)$ e $f_S(r)$ e a sombreado o domínio de rotura (Adaptado de Schneider, 1997).	17
Fig. 3.4 – Distribuição da margem de segurança $Z = R - S$ (adaptado de Melchers, 1999).	18
Fig. 3.5 – Método do Hipercubo Latino (Henriques, 1998).	22
Fig. 3.6 – Avaliação dos coeficientes de sensibilidade b_j (Henriques, 1998).	24
Fig. 3.7 – Algoritmo de filtragem de variáveis (Henriques, 1998).	25
Fig. 3.8 – Testes de hipóteses baseados em representações gráficas (Henriques, 1998).	27
Fig. 3.9 – Testes de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e de achatamento.	29
Fig. 3.10 – Viga simplesmente apoiada, com suas características.	30
Fig. 3.11 – Diagrama das forças presentes na secção.	31
Fig. 3.12 – Diagrama das forças e respectivos braços presentes na secção.	32
Fig. 3.13 – Histograma do momento resistente para simulação das 100 amostras, hipótese 1.	35
Fig. 3.14 – Histograma do momento resistente para simulação das 1.000 amostras, hipótese 1.	35
Fig. 3.15 – Histograma do momento resistente para simulação das 10.000 amostras, hipótese 1.	36
Fig. 3.16 – Histograma do momento resistente para simulação das 100 amostras, hipótese 2.	40
Fig. 3.17 – Histograma do momento resistente para simulação das 1.000 amostras, hipótese 2.	40
Fig. 3.18 – Histograma do momento resistente para simulação das 10.000 amostras, hipótese 2.	41
Fig. 3.19 – Histograma do momento resistente para simulação das 100 amostras, hipótese 1.	43
Fig. 3.20 – Histograma do momento resistente para simulação das 1.000 amostras, hipótese 1.	43
Fig. 3.21 – Histograma do momento resistente para simulação das 96 amostras, hipótese 2.	46
Fig. 3.22 – Histograma do momento resistente para simulação das 960 amostras, hipótese 2.	46
Fig. 3.23 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 1 do método de Monte Carlo.	49
Fig. 3.24 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 1 do método do Hipercubo Latino.	49
Fig. 3.25 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 2 do método de Monte Carlo.	50
Fig. 3.26 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 2 do método do Hipercubo Latino.	50
Fig. 4.1 – Corte longitudinal da passagem superior – desenho do projecto.	52

Fig. 4.2 – Corte transversal da passagem superior – desenho do projecto.....	53
Fig. 4.3 – Traçado do cabo resultante de pré-esforço com respectivas posições altimétricas e equações – desenho do projecto.	53
Fig. 4.4 – Solução da armadura do tabuleiro, secção central do vão intermédio – desenho do projecto.	54
Fig. 4.5 – Solução da armadura do tabuleiro, secção sobre o pilar P1 – desenho do projecto.....	54
Fig. 4.6 – Descrição do principal modelo de acções rodoviárias do EC1, “LM1” (adaptado de EC-1b, 2002).....	55
Fig. 4.7 – Combinação das cargas de forma a obter o momento máximo na secção de central do vão intermédio – combinação 1.	56
Fig. 4.8 – Combinação das cargas de forma a obter o momento máximo na secção sobre o pilar P1 – combinação 2.	56
Fig. 4.9 – Diagrama tensão-extensão para o betão (Wiśniewski, 2007).	58
Fig. 4.10 – Diagrama tensão-extensão para o aço ordinário e/ou de pré-esforço (Henriques, 2002)..	58
Fig. 4.11 – Corte transversal simplificado da passagem superior – desenho do projecto.....	62
Fig. 4.12 – Discretização do corte transversal simplificado da passagem superior para introdução no programa “Secção”	62
Fig. 4.13 – Disposição simplificada das armaduras da secção central do vão intermédio – desenho do projecto.	62
Fig. 4.14 – Disposição simplificada das armaduras da secção sobre o pilar P1 – desenho do projecto.	63
Fig. 4.15– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção central, intacta, do vão intermédio aos esforços de flexão.....	65
Fig. 4.16– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção, intacta, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.....	65
Fig. 4.17– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção central, deteriorada, do vão intermédio aos esforços de flexão.....	67
Fig. 4.18– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.....	67
Fig. 4.19– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, deteriorada, central do vão intermédio aos esforços de flexão.	72
Fig. 4.20– Histograma da resposta da secção, deteriorada, central do vão intermédio aos esforços de flexão.	73
Fig. 4.21– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.	74
Fig. 4.22– Histograma da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão. .	75
Fig. 4.23– Ilustração do parâmetro, h , da redistribuição da acções.	77

Fig. 4.24– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, intacta, central do vão intermédio aos esforços de flexão.....	79
Fig. 4.25– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, intacta, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.	79
Fig. 4.26– Histograma da resposta da secção, deteriorada, central do vão intermédio aos esforços de flexão.	81
Fig. 4.27– Histograma da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão. ...	81

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 2.1 – Esquema geral dos 5 níveis de avaliação de segurança (BRIME, 2001; COST345, 2004).	10
Quadro 3.1: Índice de fiabilidade alvo, β (EC-0, 2002).	18
Quadro 3.2: Probabilidade do afastamento máximo entre $F^*(x)$ e $F(x)$ devido aos factores aleatórios seja não inferior ao valor observado.	30
Quadro 3.3: Caracterização das variáveis utilizadas na verificação determinística.	31
Quadro 3.4: Caracterização das variáveis utilizadas na verificação probabilística.	33
Quadro 3.5: Resultado da análise de filtragem das variáveis para a expressão 3.61.....	34
Quadro 3.6: Resultados do momento resistente pelo método de Monte Carlo, para a hipótese 1.	34
Quadro 3.7: Resumo das características estatísticas do momento actuante.....	36
Quadro 3.8: Resultados da margem de segurança pelo método de Monte Carlo, hipótese 1.....	37
Quadro 3.9: Resultado da análise de filtragem das variáveis para a expressão 3.69.....	38
Quadro 3.10: Resultado da análise de filtragem das variáveis para a expressão 3.70.	39
Quadro 3.11: Resumo dos resultados da posição do eixo neutro.	39
Quadro 3.12: Resultados do momento resistente pelo método de Monte Carlo, hipótese 2.	39
Quadro 3.13: Resultados da margem de segurança pelo método de Monte Carlo, hipótese 2.....	41
Quadro 3.14: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1.	42
Quadro 3.15: Resultados da margem de segurança pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1. ...	44
Quadro 3.16: Resumo dos resultados da posição do eixo neutro.	44
Quadro 3.17: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 2.	45
Quadro 3.18: Resultados do índice de fiabilidade pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 2.	45
Quadro 3.19: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 2, com redução da amostragem em 4%.	45
Quadro 3.20: Resultados da margem de segurança pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1, com redução da amostragem em 4%.	47
Quadro 3.21: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1, com redução da amostragem em 4%.	47
Quadro 3.22: Resultados do índice de fiabilidade pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1, com redução da amostragem em 4%.	48
Quadro 4.1: Intensidade das cargas no modelo de acções rodoviárias do EC1 (EC-1b, 2002).	56
Quadro 4.2: Quantificação das acções actuantes.	57
Quadro 4.3: Variáveis consideradas na análise de fiabilidade, parte 1.	59
Quadro 4.4: Variáveis consideradas na análise de fiabilidade, parte 2.	60

Quadro 4.5: Momentos actuantes nas secções críticas.....	61
Quadro 4.6: Descrição das armaduras, para a secção intacta.	63
Quadro 4.7: Descrição das armaduras, para a secção deteriorada.	64
Quadro 4.8: Variáveis consideradas na análise de filtragem.	69
Quadro 4.9: Resultado da análise de filtragem das variáveis da secção intermédia do vão central.	70
Quadro 4.10: Resultado da análise de filtragem das variáveis da secção sobre o pilar P1.	71
Quadro 4.11: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção central do vão intermédio.	73
Quadro 4.12: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção sobre o pilar P1.	74
Quadro 4.13: Momento resistente nas secções críticas.	75
Quadro 4.14: Momentos actuantes da combinação de acções 1 nas secções críticas (figura 4.7).	75
Quadro 4.15: Momentos actuantes da combinação de acções 2 nas secções críticas (figura 4.8).	76
Quadro 4.16: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção central do vão intermédio.	80
Quadro 4.17: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção sobre o pilar P1.	80

1

INTRODUÇÃO

1.1. ENQUADRAMENTO E OBJECTIVOS DA DISSERTAÇÃO

Nos últimos anos, a necessidade de avaliar a segurança de estruturas existentes tem vindo a aumentar, devendo-se isto ao facto do parque de estruturas (habitaçãois ou obras de arte) ter atingido ou estar a atingir o final da sua vida útil de projecto. Estruturas edificadas nas décadas de 1950/1960 tal como no período posterior, encontram-se, na actualidade, numa fase onde é necessária a reavaliação das mesmas. Porém, conjuntamente com esta razão, são encontradas outras causas para o procedimento avaliativo, tais como, severas anomalias e/ou alteração das acções sobre a estrutura. Estes são assim alguns factores que podem comprometer a segurança estrutural tal como a segurança dos seus utentes.

Estas estruturas embora antigas, podem ter uma vida útil prolongada e serem adaptadas para novas utilizações. Pelo contrário, a sua demolição e substituição por novas estruturas vocacionadas de raiz para as solicitações actuais, conduz a custos económicos, sociais e ambientais muito superiores e mesmo inimportáveis (Monteiro, 1999).

Assim, de forma a permitir e contribuir para a segurança dos utentes, a aplicação de procedimentos que avaliem o nível da segurança das estruturas está cada vez mais a ser uma necessidade. Deste modo, constatou-se que os procedimentos existentes do projecto de estruturas novas não são os mais adequados para estas verificações. Como consequência, surgiu a necessidade da proposta de novas metodologias especializadas e mais apropriadas à avaliação da segurança de estruturas existentes. Logo, se percebeu o benefício de empregar metodologias que executem verificações com um nível crescente de sofisticação, nomeadamente, num último patamar, a aplicação de uma análise de fiabilidade com base em metodologias probabilísticas.

Deste modo, o âmbito desta dissertação centra-se na escolha, abordagem e exposição de uma metodologia que se entenda como apropriada e eficiente para a realização destes procedimentos de avaliação vocacionados para estruturas existentes. Uma metodologia que seja simples e versátil, pois permite aplicar sucessivamente metodologias mais complexas e sofisticadas, culminando numa metodologia onde se emprega uma análise de fiabilidade baseada em métodos de simulação probabilísticos. Em segunda análise, entendida a importância da realização de análises de fiabilidade com recurso a método de simulação probabilístico, será realizada uma comparação entre dois métodos. O método visto como mais eficiente será posteriormente empregue na execução de um exemplo de aplicação, como parte integrante da metodologia anteriormente proposta para estes procedimentos de avaliação da segurança de estruturas existentes.

1.2. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos. Nesta secção é apresentada uma descrição sumária de cada um destes capítulos.

Capítulo 1

É o capítulo introdutório onde se faz uma apresentação sumária do trabalho e dos capítulos que o compõem.

Capítulo 2

Neste capítulo são introduzidos os conceitos e procedimentos usados na análise da segurança das estruturas existentes. São abordadas questões ligadas à incerteza dos parâmetros e do comportamento das estruturas. Apresentam-se também as principais diferenças entre o processo de avaliação de estruturas e o de projecto. Aborda-se a diferença entre a execução de uma análise determinística e uma análise probabilística. Sendo por fim apresentado o método escolhido como o mais adequado para a realização de um processo de avaliação de uma estrutura existente.

Capítulo 3

Aqui começa-se por abordar os princípios básicos da estatística, dá-se a definição de variáveis aleatórias e é definida com maior cuidado a distribuição normal. É introduzida a fiabilidade estrutural, onde são apresentados os seus fundamentos e é dada a definição do índice de fiabilidade. São apresentados os métodos de análise de fiabilidade, nomeadamente os métodos de simulação. Destes métodos são referidos e explicados o método de simulação de Monte Carlo e o método do Hipercubo Latino. É apresentada uma análise de sensibilidade que permite efectuar uma filtragem das variáveis que são consideradas relevantes para o processo de avaliação, são apresentados dois métodos de verificação das simulações efectuadas, de modo a verificar a aplicabilidade da distribuição normal aos resultados das simulações. Por fim é apresentado um exemplo de aplicação onde é realizada uma comparação entre os dois métodos de simulação explicados neste capítulo.

Capítulo 4

No presente capítulo é abordado um exemplo de aplicação, onde é efectuada uma avaliação da segurança de uma passagem superior. Nesta avaliação é abordada a metodologia proposta para a avaliação de estruturas no capítulo 2 e a método do Hipercubo Latino apresentado no capítulo 3.

Capítulo 5

Resume-se o trabalho elaborado, realçando os aspectos mais importantes e tecendo os principais comentários e conclusões a reter. Apresenta-se também alguns possíveis desenvolvimentos futuros.

2

AVALIAÇÃO DE ESTRUTURAS EXISTENTES**2.1. INTRODUÇÃO**

A necessidade de uma avaliação da segurança de uma estrutura existente pode surgir devido às mais variadas razões. Uma destas é quando existe uma alteração ao uso da estrutura, por exemplo uma estrutura projectada para um uso habitacional ser alterado para uso comercial, ou no caso de uma ponte, quando existe a necessidade de permitir a passagem de uma carga excepcionalmente pesada para a qual esta não está certificada. Outra razão surgirá da necessidade de uma avaliação da capacidade resistente da estrutura devido à sua deterioração, danos mecânicos, reparação. Existe ainda a necessidade de avaliar estruturas em fim de vida que devido à sua idade foram calculadas recorrendo a regulamentos que se encontram desactualizados, (por exemplo, as cargas de dimensionamento do regulamento desactualizado são inferiores às dos regulamentos mais actuais, como tal é necessário avaliar a conformidade da estrutura) e no subsequente plano de inspecção e manutenção da referida estrutura. Mas visto que o comportamento das estruturas depende de diversos factores e que a maioria destes não pode ser controlada de forma absoluta, tem conduzido a que os problemas de avaliação da segurança de estrutura tenham um carácter marcadamente não determinístico chegando, em casos mais extremos, a ter um carácter puramente probabilístico.

A questão “é a estrutura ainda suficientemente segura?” é bastante diferente da questão enfrentada pelos engenheiros durante o processo de projecto de uma nova estrutura e não pode ser respondida usando o método tradicional de avaliação da segurança descritos nos regulamentos de projecto. Uma das razões é que muitas das “incertezas de projecto” relacionadas com a previsão das propriedades mecânicas dos materiais, geometria da estrutura e as cargas existentes na estrutura podem ser eliminadas visto que muitos destes parâmetros podem ser medidos. Isto torna os dois processos, consequentemente diferentes. Portanto, o processo de avaliação difere do processo conhecido do projecto. Podendo, por exemplo, numa primeira análise fazer com que sejam utilizados no processo de avaliação coeficientes de segurança inferiores aos utilizados no processo de projecto. Contudo, estes no caso da avaliação tomam valores muito conservativos podendo levar a que os custos da intervenção sejam muito superiores aos que seriam realmente necessários. Esta alteração dos coeficientes de segurança é um primeiro passo que pode ser tido em conta. No limite o processo não terá em conta nenhum coeficiente de segurança e será realizada uma análise probabilística do problema.

Este capítulo introduz os conceitos e procedimentos usados na análise da segurança das estruturas existentes. Aborda ainda questões ligadas à incerteza dos parâmetros e do comportamento das estruturas. Desta forma são também apresentadas as principais diferenças entre o processo de

avaliação de estruturas e o de projecto. Sendo por fim apresentado o método escolhido como o mais adequado para a realização de um processo de avaliação de uma estrutura existente.

2.2. PRINCÍPIOS DA AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA

2.2.1. INCERTEZAS NA AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA ESTRUTURAL

Um sistema estrutural pode considerar-se como contendo incertezas quando não temos completo conhecimento sobre alguns aspectos que descrevem esse sistema e o seu comportamento, seja o modelo utilizado ou os valores dos seus parâmetros (Veiga, 2008). Assim, indo de encontro ao referido por Ayyub (1987), a segurança absoluta de uma estrutura não pode ser garantida devido à incapacidade de prever condições de carga futuras e de conhecer com rigor as propriedades dos materiais, devido ao uso de hipóteses simplificadoras para prever o comportamento da estrutura às acções actuantes e às condições ambientais, às limitações dos métodos numéricos usados e aos factores humanos. Estas inúmeras fontes de incerteza, como se pode verificar, vão condicionar fortemente o processo de avaliação do comportamento de uma estrutura. A má interpretação e definição destas incertezas pode, no limite, levar a que o processo de avaliação resulte em situações onde o modelo de avaliação descrito não interprete com rigor a realidade da estrutura, havendo assim desvios significativos da realidade.

As diversas fontes de incerteza que, como foi possível constatar, condicionam a avaliação do comportamento de uma estrutura podem ser agrupadas da seguinte forma (Thoft-Christensen, 1982; Melchers, 1987; Henriques, 1998):

Incerteza física: Este grupo está associado à inerente natureza incerta das propriedades dos materiais, da geometria dos elementos, da variabilidade e da simultaneidade das diferentes acções, etc. A incerteza física pode ser controlada através de uma base de dados suficientemente grande, ou através de um controlo de qualidade conveniente. Geralmente, este tipo de incerteza não é conhecido *a priori*, mas pode ser estimado através de observações das variáveis, ou recorrendo a experiências anteriores.

Incerteza na modelação: Resulta das aproximações teóricas ao comportamento real dos materiais e das simplificações na consideração das acções e dos seus efeitos. Este tipo de incerteza pode ser considerado através de uma variável que represente a relação entre a verdadeira resposta e a resposta prevista pelo modelo.

Incerteza estatística: Este grupo está associado com a inferência estatística, uma vez que a estimativa dos parâmetros que caracterizam os modelos probabilísticos é realizada a partir de um número limitado de dados disponíveis. A incerteza estatística pode ser considerada através da função de distribuição de probabilidade. É possível usar uma aproximação *Bayesiana* (Baecher, 1982; Ditlevsen, 1991) para redefinir essa função de distribuição de forma a incorporar mais informação obtida a partir de novos dados.

Incerteza devida a factores humanos: Resulta do envolvimento humano durante a vida da obra. Este tipo de incerteza deve-se não somente à variação natural durante a execução das várias tarefas, mas também às intervenções e aos erros cometidos nos processos de documentação, dimensionamento, construção e utilização da estrutura. O conhecimento das incertezas é limitado, sendo na sua maioria de carácter qualitativo. É, no entanto, evidente que o seu efeito provoca um aumento da incerteza da resistência estrutural para um valor superior àquele que é devido somente às propriedades mecânicas e geométricas da estrutura.

2.2.2. AVALIAÇÃO VERSUS PROJECTO

Nesta secção, para melhor explicitar a diferença entre a avaliação da segurança de estruturas existentes e o projecto de estruturas novas será apresentada a diferença no caso específico das pontes. Desta forma será primeiro apresentado os procedimentos tomados para a elaboração de um projecto de uma ponte e de seguida apresentados os procedimentos necessários para a avaliação da segurança de uma ponte.

Para a realização do projecto de uma ponte usualmente são realizados os seguintes procedimentos. Primeiro é definida a directriz e a rasante da estrada ou caminho-de-ferro consoante certas classes de tráfego. De seguida é escolhida a tipologia da ponte e são definidos os comprimentos dos vãos de acordo com as condicionantes presentes, tipologia do terreno e a solução determinada. Após estes passos é definido o sistema estático que traduz a ponte e são assumidas as dimensões das secções transversais dos seus elementos. Em seguida as acções são assumidas de acordo com a informação presente nos regulamentos. No passo seguinte é calculado o efeito da carga nos elementos estruturais e é determinada a capacidade resistente dos membros da ponte utilizando os valores de resistência dos materiais e as fórmulas presentes no regulamento. Quando a capacidade resistente de todos os membros da ponte é superior ao efeito das acções calculado o processo pode parar, após este passo poderá ser realizado um eventual processo de optimização dos elementos estruturais. Se tal não acontecer, a geometria das secções ou a classe dos materiais utilizados terá que ser ajustada para que os critérios de segurança sejam cumpridos.

Para a avaliação da segurança de uma ponte existente, os procedimentos a efectuar são diferentes pois trata-se de uma situação completamente distinta. Para começar, e sendo uma estrutura edificada, a geometria já se encontra definida sendo apenas necessário proceder-se à sua medição. Podendo depois ser assumida de acordo com o construído (se forem verificados desvios significativos em relação ao projecto inicial) ou de acordo com o projecto de execução da mesma (tendo em atenção se a geometria corresponde ao efectivamente presente no projecto). Tendo a geometria definida, falta definir os valores da resistência dos materiais de construção utilizados. Estes valores podem ser obtidos através da realização dos ensaios existentes para a determinação destas características, estes podem ser destrutivos e semi-destrutivos (ensaio de provetes de aço, análise metalográfica, ensaio de carotes ou “*core test*”, ensaio de arranque ou “*pull-out test*”, ensaio de tracção directa ou “*pull-off test*”, ensaio de fractura interna e de arranque por corte ou “*internal fracture test*”, ensaio de rotura por flexão ou “*break-off test*”, ensaio de penetração ou “*windsor probe test*”, etc.) ou não destrutivos (ensaio de ultra-sons, ensaio de esclerómetro ou “*rebound hammer test*”, teste de termoluminescência, determinação do teor de água residual, etc.). Em alternativa as características podem ser assumidas como presentes nas especificações de projecto ou com base em dados obtidos através do processo de qualidade ou com base em ambos os casos anteriores. As acções de carga sobre a ponte podem também ser obtidas recorrendo a processos de medição. Por exemplo o peso próprio da ponte pode ser determinado pela pesagem da ponte recorrendo a macacos hidráulicos. As sobrecargas referentes ao tráfego, também podem ser medidas utilizando estações de pesagem dinâmica (*weight-in-motion*) e sendo em seguida utilizados para calibrar os modelos de carga do regulamento. Os efeitos das cargas na estrutura da ponte podem ser obtidos de forma similar às anteriores, neste caso recorrendo por exemplo a vários extensómetros dispostos ao longo da ponte para se medir as suas deformações. Por fim, a capacidade resistente dos membros da ponte pode igualmente ser prevista ou actualizada baseada em medições e ensaios de carga.

Devido a todos os factos acima mencionados torna-se evidente que a quantidade de informação disponível no processo de avaliação de pontes existentes é evidentemente mais elevado do que no processo de projecto da ponte. Consequentemente, a incerteza inerente à avaliação é usualmente mais

baixa do que a incerteza intrínseca do projecto de pontes. Não obstante, é necessário salvaguardar que nas situações correntes esta quantidade de informação relativa à ponte poderá não estar disponível ou poderá existir mas sendo as medições de baixa qualidade. Desta forma, a incerteza relacionada com o nosso conhecimento limitado do real estado da estrutura, apesar de inferior, permanece significativa.

Tendo em conta o acima referido para o processo de avaliação de uma ponte existente versus o seu processo de projecto, resta salientar que o processo para a avaliação de um outro tipo de estrutura é em tudo semelhante a este, não esquecendo de ressaltar as especificidades de cada estrutura, sendo portanto a incerteza referente ao processo de avaliação inferior relativamente ao processo de projecto para qualquer tipo de estruturas.

2.2.3. MÉTODOS DE VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA

As incertezas subordinadas às variáveis que intervêm na caracterização das acções e da resposta estrutural devem ser reflectidas de forma apropriada nos métodos de verificação da segurança. Assegurando assim, de acordo com as correspondentes probabilidades de ocorrência, uma margem de segurança em relação aos diferentes estados limite, na solução de dimensionamento resultante da aplicação destes métodos.

O dimensionamento, tendo em conta os vários estados limites, pode ser considerado como um processo de decisão (CEB-FIP, 1978). Para a obtenção de uma probabilidade de rotura, devem ser tidas em conta as incertezas associadas às variáveis intervenientes e a forma como elas condicionam o comportamento da estrutura.

A probabilidade de rotura (isto é, de ser atingido um estado limite) representa o custo que a sociedade está “disposta” a assumir, em termos de perdas de vidas humanas, consequências económicas e perigos vários para a comunidade em geral (Henriques, 1998). Em termos práticos, esta é interpretada como uma medida adequada da incerteza relativa ao dimensionamento de estruturas. Isto apenas representa um valor para o qual a estrutura atingiu um estado extremo em consideração às relações de projecto. Tal não é condição indicativa que a estrutura em questão irá colapsar, apenas indica que esta necessitará de ser alvo de uma reavaliação.

Os vários métodos de verificação da segurança podem ser agrupados nos quatro seguintes níveis (Henriques, 1998):

Nível 0: Corresponde a análises puramente determinísticas. As variáveis envolvidas no processo de dimensionamento têm valores estritamente determinísticos, sendo as incertezas consideradas através de coeficientes de segurança globais. Geralmente, estes coeficientes são estimados empiricamente através de experiências passadas.

Nível 1: Refere-se aos métodos designados por semi-probabilísticos. A variabilidade das acções e das características resistentes dos materiais é considerada através de valores representativos (nominais ou característicos) associados com coeficientes parciais de segurança, γ . Os valores característicos são definidos a partir dos valores médios, dos coeficientes de variação (ou desvios padrão) e da função de distribuição. Os coeficientes parciais de segurança são aferidos, geralmente, a partir de métodos probabilísticos do nível 2 ou, menos correntemente, do nível 3. Os métodos de nível 1 são habitualmente utilizados nas actuais normas de estruturas para definir regras de dimensionamento.

Nível 2: Corresponde a métodos probabilísticos baseados na caracterização das variáveis básicas que intervêm no processo, através de medidas estatísticas que descrevem a tendência central (geralmente os valores médios) e a sua dispersão, e no cálculo da probabilidade de ser atingido dado estado limite.

A avaliação probabilística da segurança é efectuada por técnicas numéricas aproximadas, recorrendo a hipóteses simplificadas na determinação dessa probabilidade.

Nível 3: Diz respeito a métodos puramente probabilísticos, baseados em técnicas que têm em conta a distribuição conjunta de todas as variáveis básicas. A probabilidade de ser atingido um dado estado limite é calculado analiticamente (viável somente para casos muito simples) ou, mais correntemente, usando métodos de simulação.

2.2.4. ANÁLISE DETERMINÍSTICA VERSUS ANÁLISE PROBABILÍSTICA

Uma abordagem, através de métodos que têm em conta a limitação das tensões admissíveis, é a mais comumente utilizada no processo de projecto e de avaliação da segurança de estruturas existentes. Nesta abordagem a tensão máxima calculada em todos os membros da estrutura sob o carregamento mais desfavorável, terá de ser comparada com a tensão admissível, mais concretamente as zonas críticas da estrutura terão de cumprir este nível de tensão. O ajuste destas tensões admissíveis foi realizado com base nas propriedades mecânicas dos materiais usados. A insuficiência deste conceito e a fim de racionalizar o processo de projecto, considerando a variabilidade das propriedades mecânicas dos materiais, da geometria e das cargas envolvidas, gerou-se a necessidade de definir a noção de segurança sob uma perspectiva probabilística. Desta forma, surge a teoria da fiabilidade estrutural e o uso de métodos probabilísticos no projecto de estruturas e na sua avaliação, ou seja, a introdução do conceito de probabilidade de rotura.

No método probabilístico a avaliação de segurança baseia-se na caracterização realista da resposta estrutural, R , e das solicitações, S , a que está sujeita, através de variáveis aleatórias visto que estes não são perfeitamente conhecidos. Para tal, adoptam-se valores que têm em conta as distribuições reais das propriedades mecânicas dos materiais, das imperfeições geométricas dos elementos estruturais, das acções ou dos seus efeitos e de outras características significativas, isto é, são descritas pelas suas funções densidade de probabilidade (ver fig. 2.1). Uma vez definidos, R e S , o critério utilizado para saber se uma estrutura é segura permanece semelhante ao do método das tensões admissíveis e pode ser expresso pela seguinte inequação:

$$S \leq R \quad (2.1)$$

O verdadeiro parâmetro que nos transmite o nível de fiabilidade correspondente ao elemento analisado da estrutura é a probabilidade, P_f , que uma acção, S , aplicada ao elemento analisado exceda a resistência, R , desse elemento:

$$P_f = P(R \leq S) \quad (2.2)$$

Esta probabilidade pode ser representada graficamente como a zona sombreada entre as duas funções densidade de probabilidade como presente na figura 2.1.

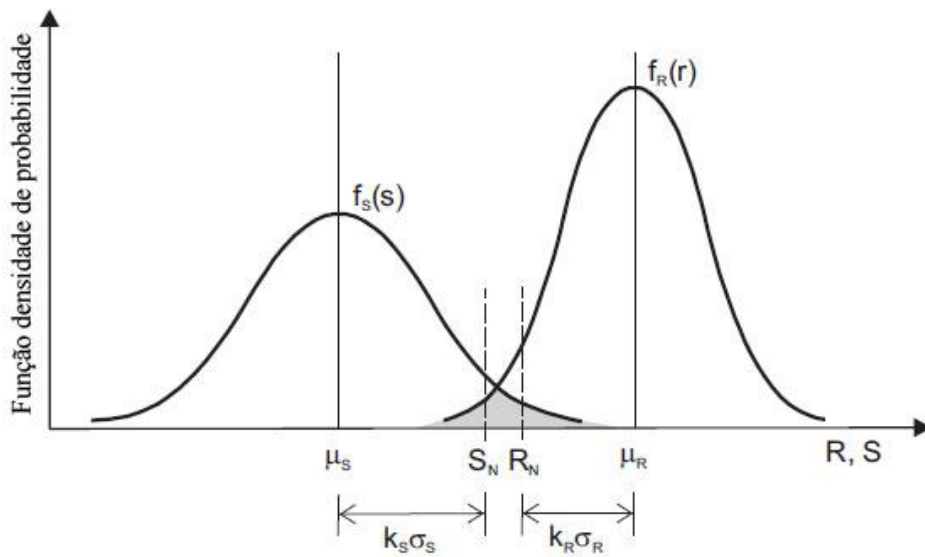


Fig. 2.1 – Fundamentos da análise de risco (adaptado de Haldar e Mahadevan, 2000a).

Na metodologia semi-probabilística, utilizada em grande parte dos regulamentos de projecto e nas normas de avaliação, esta probabilidade é substituída pela verificação de um critério de segurança que inclui valores nominais (ou característicos) de R e S , expressos como R_N e S_N , e os coeficientes parciais de segurança γ_R (ou Φ_R) e γ_S que pode ser representada da seguinte forma:

$$\gamma_S S_N \leq \frac{R_N}{\gamma_R} = \Phi_R R_N \quad (2.3)$$

A resistência nominal (ou característica) generalizada R_N é usualmente um valor conservativo, talvez um, dois ou até três desvios padrão σ_R abaixo do valor médio μ_R (ver figura 2.1). A acção nominal (ou característica) generalizada S_N é da mesma forma um valor conservativo, contudo este é vários desvios padrão σ_S acima do seu valor médio μ_S . Os coeficientes parciais de segurança para a resistência γ_R (ou Φ_R) e para as acções γ_S são usualmente conservativos, escolhidos com base na experiência passada ou calibração.

O método dos coeficientes parciais de segurança é classificado como semi-probabilístico, considerando a aplicação de conceitos estatísticos e probabilísticos na estimativa dos dados de entrada, na formulação dos critérios de avaliação e na determinação dos factores de carga e resistência. Contudo, do ponto de vista do engenheiro realizando uma avaliação, a aplicação deste método ainda é completamente determinística e não permite avaliar o risco real ou as reservas de resistência dos membros da estrutura.

Visto que o método semi-probabilístico providencia um nível relativamente uniforme de segurança nos elementos estruturais e é de uma aplicação simples, este torna-se um processo muito prático de utilizar no processo de projecto de estruturas. Este método pode de igual forma ser muito prático e suficientemente exacto quando utilizado na avaliação de estruturas. Contudo, em algumas situações este pode ser muito conservativo conduzindo ao desnecessário reforço ou até mesmo à substituição da estrutura em análise quando esta ainda apresenta reservas de resistência suficientes para que a intervenção nesta não seja ainda necessária. Desta forma, o uso directo de um método probabilístico

de avaliação de segurança pode ser requerido, pois este método já permite fazer uma avaliação que tenha em conta as reservas de resistência referidas.

2.3. METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO

Nesta secção será apresentada uma metodologia que se entende ser a mais adequada para a avaliação da segurança de estruturas existentes. Esta metodologia foi proposta por BRIME (2001) e COST345 (2004) para pontes mas entende-se que seja também adequada a sua generalização para todo o tipo de estrutura, pois tem por base uma filosofia de cinco níveis de avaliação com um nível crescente complexidade e um nível decrescente de conservatividade. Esta metodologia na sua formulação original pode ser descrita da seguinte forma:

Nível 1. Este é o mais simples nível de avaliação, devolvendo uma estimativa conservativa da capacidade de carga. Nesta fase, apenas são necessários simples métodos de análise e são utilizados coeficientes parciais de segurança padrão do projecto e da avaliação de segurança (caso estes existam).

Nível 2. Neste nível a avaliação requer o uso de uma análise mais refinada (grelha, método dos elementos finitos “MEF”, eventualmente, MEF não-lineares ou plástica) e uma melhor idealização da estrutura (malha refinada, tipo de elementos MEF mais adequados). Além disso, permite a determinação da força característica dos materiais baseados nos dados disponíveis (certificados existentes ou testes recentes em estruturas similares).

Nível 3. A avaliação no nível em questão permite a utilização de cargas específicas da estrutura na avaliação da segurança. Além do mais, permite que se realize testes aos materiais com o intuito de determinar as suas propriedades de resistência características. Continua a ser ainda recomendada a aplicação dos coeficientes parciais de segurança presentes nos regulamentos de projecto ou de avaliação de segurança.

Nível 4. A avaliação permite incluir qualquer característica de segurança adicional (importância do membro na segurança global da estrutura, performance passada e segurança em serviço comprovada, consequências da rotura, etc.) da estrutura em causa e correspondente refinamento do critério de avaliação. Todas as mudanças ao critério utilizado podem ser determinadas através de rigorosos métodos de análise de fiabilidade, ou por mudanças subjectivas aos factores de segurança parciais. É necessário reforçar o cuidado que é necessário ter nesta etapa da avaliação para que os parâmetros benéficos não sejam tidos em conta duplamente, para que não se proceda a uma avaliação contra a segurança.

Nível 5. A avaliação deste nível emprega a teoria da fiabilidade no processo de avaliação da resistência da estrutura. Esta análise requer que se possua dados estatísticos de todas as variáveis definidas nas equações do carregamento e de resistência. A avaliação a este nível é dotada de uma grande flexibilidade, contudo deve-se salientar que os resultados são muito sensíveis aos parâmetros estatísticos e aos métodos de análise estrutural usados. Geralmente a avaliação a este nível requer um elevado grau de conhecimento e especialização.

Como se pode denotar desta explicitação dos cinco níveis que compõe este método o Nível 1 é o mais simples e o Nível 5 é o mais sofisticado, encontrando-se este método resumido esquematicamente no quadro 2.1. A recomendação para se avançar para o nível seguinte é realizada exclusivamente quando a estrutura reprova no nível anterior de avaliação.

Quadro 2.1 – Esquema geral dos 5 níveis de avaliação de segurança (BRIME, 2001; COST345, 2004).

Nível	Modelo de Resistência e Modelo de Carga	Métodos de Análise	Métodos de Avaliação
1	Modelo de carga e de resistência como definido no regulamento. Propriedades dos materiais baseadas nas informações de projecto e no regulamento.	Análise básica. Comportamento linear elástico.	Análise determinística. Coeficientes parciais de segurança tal como no regulamento.
2			
3	As propriedades dos materiais e os modelos de carga determinísticos podem ser definidos com base nos resultados dos ensaios e observações.	Análise refinada. Podem ser usados métodos de análise não-lineares ou plásticos assegurando que o nível de ductilidade é suficiente.	Análise determinística. Coeficientes de segurança ajustados.
4			
5	Modelos totalmente probabilísticos definidos com base nos resultados dos ensaios e no conhecimento prévio.		Análise probabilística.

Tal como se pode visualizar no quadro 2.1, o método de avaliação mais sofisticado combina a análise de redistribuição da carga (análise não-linear) com uma análise probabilística. Este nível pode ser aplicado como último recurso para evitar uma reparação, reforço ou mesmo substituição desnecessária. Atendendo que este nível reflecte, com muito mais precisão, o real comportamento da estrutura, muitas destas são declaradas como inseguras nos quatro níveis prévios, podem mostrar ainda uma reserva de segurança quando sujeitas a este nível de avaliação.

3

CONCEITOS DE ESTATÍSTICA E INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE FIABILIDADE

3.1. INTRODUÇÃO

Os engenheiros são responsáveis por proporcionar os elementos de uma estrutura de tal forma que estes satisfaçam os critérios de concepção relacionados com a performance, segurança, condições de serviço ou durabilidade sob diversas solicitações. Para gerir esta responsabilidade diariamente, estes têm de lidar com várias incertezas. As fontes destas incertezas são muito variadas. Grande parte delas está relacionada com a incerteza dos parâmetros mecânicos dos materiais de construção, a incerteza da geometria da estrutura e a incerteza do carregamento. Os modelos que descrevem o comportamento da estrutura ou de um elemento estrutural estão também envoltos em incertezas. A forma mais racional de lidar com este problema é considerar todos os parâmetros incertos como variáveis aleatórias (descritas pela sua função densidade de probabilidade FDP) e realizar análises de fiabilidade que é simplesmente uma análise probabilística da garantia de desempenho do sistema.

Neste capítulo alguns princípios básicos da estatística, princípios e metodologias da análise de fiabilidade são brevemente introduzidos e será também apresentado um breve exemplo de aplicação de forma demonstrar as potencialidades dos métodos apresentados (Melchers, 1999; Nowak & Collins, 2000; Schneider, 1997; Haldar & Mahadevan, 2000a).

3.2. FUNDAMENTOS ESTATÍSTICOS

3.2.1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

A maioria dos fenómenos físicos não é possível prever com certeza. A observação e medição destes fenómenos fornece múltiplos resultados entre os quais alguns são mais frequentes do que outros. A ocorrência de múltiplos resultados sem nenhum padrão é frequentemente chamada de “incerteza”, “aleatoriedade” ou “estocasticidade”.

Definição de variáveis aleatórias.

Qualquer quantidade que é incerta é uma quantidade aleatória e é usualmente chamada de “variável aleatória”. Em geral, grande parte dos parâmetros envolvidos nos problemas de engenharia são incertos e deveriam ser considerados como variáveis aleatórias. As variáveis aleatórias são discretas ou contínuas, contudo, nos problemas da engenharia estrutural a maioria delas são contínuas.

A variação de uma variável aleatória é geralmente descrita pela sua função distribuição, FD, $F_X(x)$ (ver Fig. 3.1) que define a probabilidade, P , que a variável X é igual ou inferior a um determinado valor x :

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (3.1)$$

Frequentemente em vez da função distribuição FD é utilizada a função densidade de probabilidade, FDP, $f_X(x)$ (ver Fig. 3.1), para descrever a variação do parâmetro X . Para variáveis aleatórias contínuas a FDP relaciona-se com a FD da seguinte forma:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (3.2)$$

Parâmetros de variáveis aleatórias.

Para qualquer variável aleatória X é possível definir certos “parâmetros” que ajudam a descrever as propriedades de uma variável. Esses parâmetros das variáveis aleatórias são frequentemente chamados de “momentos estatísticos”.

Média ou valor esperado (Primeiro Momento).

O valor médio de X é designado por μ_X e para variáveis aleatórias contínuas é definido pela seguinte expressão:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (3.3)$$

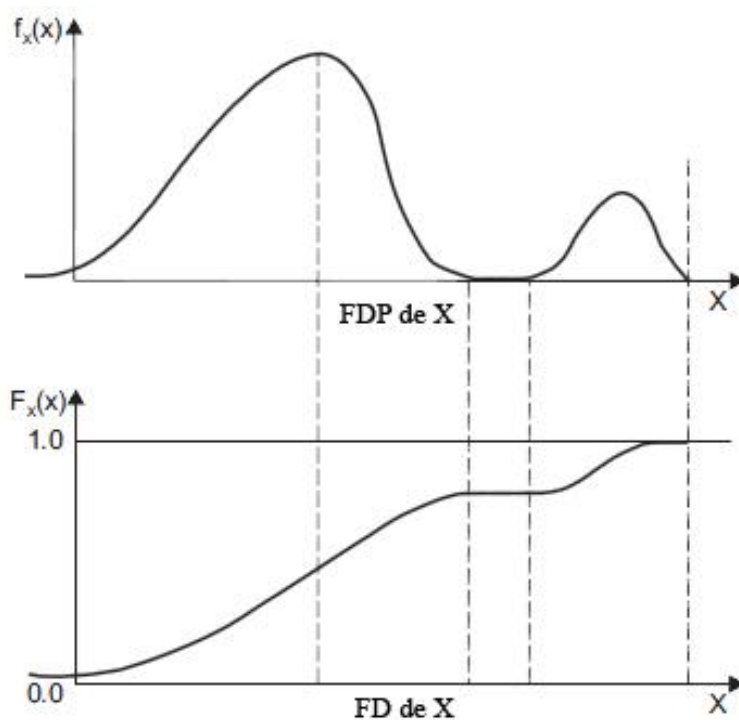


Fig. 3.1 – FDP e FD de uma variável contínua aleatória (adaptado de Haldar e Mahadevan, 2000a).

Variância e desvio padrão (Segundo Momento).

A variância de X é designada por σ_X^2 e para variáveis aleatórias contínuas é definido da seguinte forma:

$$E(X - \mu_X)^2 = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (3.4)$$

O desvio padrão de X , σ_X , pode ser definido como se segue:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad (3.5)$$

O coeficiente de variação, designado frequentemente por V_X , é definido como:

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (3.6)$$

Desvio cúbico médio (Terceiro Momento).

O desvio cúbico médio, também conhecido como terceiro momento central, dá-nos uma medida da falta de simetria da distribuição e é definida pela seguinte expressão:

$$E(X - \mu_X)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^3 f_X(x) dx \quad (3.7)$$

O coeficiente, adimensional, de assimetria amostral, γ_1 , pode ser introduzido como:

$$\gamma_1 = \frac{E(X - \mu_X)^3}{\sigma_X^3} \quad (3.8)$$

Se γ_1 for zero, a aleatoriedade é simétrica, se γ_1 for positivo, a dispersão é mais acima da média, e se for negativo a dispersão é mais abaixo desta.

Curtose (Quarto Momento).

A curtose também conhecida como quarto momento central, é um parâmetro que permite saber se a distribuição tem uma forma mais ou menos achatada e é definida da seguinte forma:

$$E(X - \mu_X)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^4 f_X(x) dx \quad (3.9)$$

O coeficiente, adimensional, de achatamento (curtose amostral), γ_2 , pode ser introduzido como:

$$\gamma_2 = \frac{E(X - \mu_X)^4}{\sigma_X^4} \quad (3.10)$$

Se γ_2 for positivo, a distribuição apresenta uma maior concentração de dados junto ao centro (isto é próximo da média), e se a for negativa apresenta uma forma mais achatada.

Distribuições de probabilidade comuns.

Os tipos mais comuns de distribuição usados na fiabilidade estrutural são os seguintes: uniforme, triangular, normal, lognormal, exponencial, gama, beta, Gumbel (Extremos Tipo I), Frechet (Extremos Tipo II), Weibull (Extremos Tipo III), e Poisson. Entretanto, as mais utilizadas são a distribuição normal e a lognormal, mas visto que neste trabalho apenas serão abordadas variáveis com uma distribuição normal apenas esta será descrita de seguida. Informação detalhada acerca das restantes distribuições pode ser encontrada na seguinte bibliografia: Melchers (1999), Nowak & Collins (2000), Schneider (1997) e Haldar & Mahadevan (2000a).

Distribuição Normal ou de Gauss.

A distribuição normal é provavelmente a distribuição amplamente mais usada na fiabilidade estrutural. A FDP da distribuição pode ser expressa da seguinte forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] \quad (3.11)$$

onde μ_X e σ_X são respectivamente a média e o desvio padrão. A correspondente FD pode ser expressa como:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] dx \quad (3.12)$$

A distribuição normal, usualmente conotada como $N(\mu, \sigma)$, é simétrica em relação à média e é aplicável para qualquer valor de uma variável aleatória que varie de $-\infty$ a $+\infty$. A figura 3.2 mostra formas da FDP de distribuições normais com média 0 e desvios padrão 0.5, 1.0 e 2.0 respectivamente.

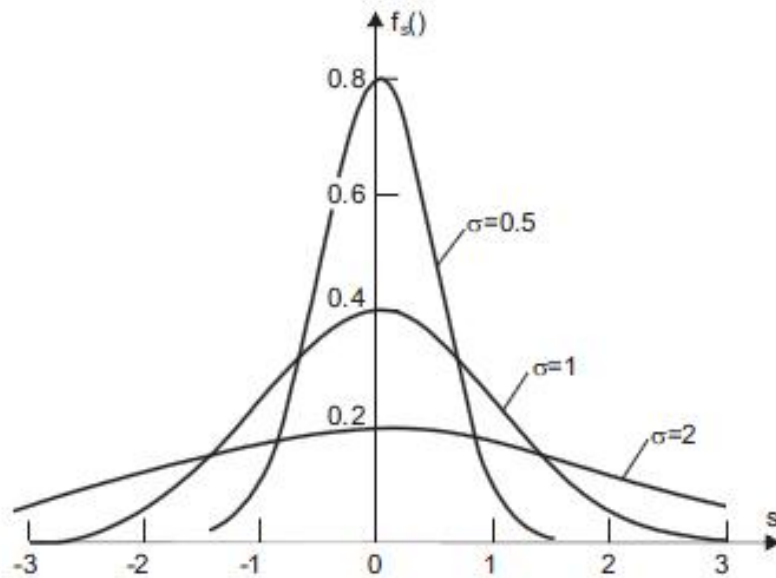


Fig. 3.2 – Função densidade de probabilidade de uma distribuição normal (Melchers, 1999).

A distribuição normal com média zero e desvio padrão unitário, conotada como $N(0, 1)$, é chamada de distribuição normal reduzida e a sua FD é denominada da seguinte forma $F_S(s) = \Phi_S$ e esta está amplamente disponível sob a forma de tabela. Qualquer variável X pode ser transformada numa variável normal reduzida (ou padronizada) através da seguinte expressão:

$$S = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (3.13)$$

Realizando a transformação da FDP e da FD de S pode ser expressas como se segue:

$$f_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} s^2 \right] \quad (3.14)$$

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}s^2\right] ds \quad (3.15)$$

3.2.2. FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Quando uma variável de resposta (por exemplo, momento resistente de uma secção de betão armado) é uma função de várias variáveis aleatórias (por exemplo, área da armadura, altura da secção, tensão resistente do aço e do betão, etc.), a sua análise da incerteza é consideravelmente complexa. Contudo, para alguns casos excepcionais existem algumas soluções simples e concisas. Este é o caso da soma, subtracção, multiplicação e divisão de variáveis normais independentes.

Soma e subtracção de variáveis normais independentes.

Quando uma variável aleatória Y é uma soma (ou subtracção) de variáveis normais aleatórias independentes X_i , com média μ_{X_i} e desvio padrão σ_{X_i} , expressa como:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_i X_i + \dots + a_n X_n \quad (3.16)$$

onde a_i 's são constantes, demonstra-se que Y é também uma variável normal aleatória com média e desvio padrão definidos da seguinte forma:

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n a_i \mu_{X_i} \quad (3.17)$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (3.18)$$

Teorema do limite central.

De acordo com o teorema do limite central a soma de uma grande quantidade de variáveis aleatórias, onde nenhuma domina a soma, tende para uma distribuição normal (indiferentemente das suas distribuições iniciais) à medida que o número de variáveis aumenta. Analogamente o produto de um grande número de variáveis aleatórias, onde nenhuma domina o produto, tende a seguir uma distribuição lognormal (independentemente das suas distribuições iniciais) conforme o número de variáveis aumenta.

3.3. INTRODUÇÃO À FIABILIDADE ESTRUTURAL

3.3.1. ESTADOS LIMITE E DEFINIÇÃO DE FIABILIDADE

De acordo com Nowak & Collins (2000) o estado limite é definido como a fronteira entre o desempenho desejado e indesejado da estrutura e é matematicamente representado pela chamada função estado limite ou pela função de desempenho $g(X_i)$. Este desempenho indesejado pode ter diversas origens tais como fendilhação, excesso de deformação, momento resistente insuficiente para suportar as cargas aplicadas, entre muitas outras. Tradicionalmente cada uma destas origens ou modos de rotura é considerado separadamente e é definido para cada um a sua função estado limite.

Geralmente, são considerados dois tipos de estados limite, o Estado Limite Último, ELU, e o Estado Limite de Utilização ou de Serviço, ELS. Alguns autores separam ainda um terceiro estado limite, nomeadamente o Estado Limite de Fadiga, ELF, considerado tradicionalmente como um dos estados

limite últimos. Recentemente um quarto grupo de estados limite foi caracterizado e está relacionado com a durabilidade estrutural.

O estado limite último está principalmente relacionado com a perda da capacidade resistente, contudo o estado limite de serviço está relacionado com a deterioração gradual, conforto dos utilizadores, questões de manutenção entre muitos outros.

Como já foi referido cada estado limite pode ser representado pela função estado limite $g(X_i)$, onde X_i representa o vector das variáveis aleatórias, que descreve tanto o problema como os requisitos para um problema específico. A violação da função estado limite pode ser definida pela seguinte expressão (condição de rotura):

$$g(X_i) < 0 \quad (3.19)$$

A probabilidade da violação do estado limite (probabilidade de rotura) pode ser escrita da seguinte forma:

$$P_f = P\{g(X_i) < 0\} \quad (3.20)$$

Sabendo já a probabilidade de rotura podemos definir a fiabilidade (probabilidade complementar do evento contrário):

$$R = 1 - P_f \quad (3.21)$$

Os métodos práticos da avaliação quantitativa da probabilidade de rotura ou fiabilidade são o objecto de estudo da teoria da fiabilidade.

3.3.2 FUNDAMENTOS

No seu caso mais simples a função estado limite $g(X_i)$ pode ser a função de apenas duas variáveis elementares R e S , onde a primeira é a resistência estrutural generalizada e a segunda a acção generalizada ou o efeito da acção. Quando a acção generalizada ou efeito da acção é superior à resistência generalizada ocorre a rotura. Assim sendo a probabilidade de rotura pode ser definida como:

$$P_f = P(R < S) = P(R - S < 0) = P\left(\frac{R}{S} < 1\right) \quad (3.22)$$

ou generalizando:

$$P_f = P\{g(R, S) < 0\} \quad (3.23)$$

O problema pode ser ilustrado graficamente, tal como apresentado na figura 3.3, onde as funções densidade probabilidade marginal $f_R(r)$ e $f_S(r)$ juntamente com a função densidade conjunta $f_{R,S}(r)$ de duas variáveis aleatórias são representadas. A área sombreada representa o domínio de rotura D . Para este problema ilustrado a probabilidade de rotura passa a ser a seguinte:

$$P_f = P(R - S < 0) = \int_D \int f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (3.24)$$

Quando as variáveis elementares R e S são independentes (não existe correlação estatística entre ambas) a equação 3.24 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$P_f = P(R - S < 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x) f_S(x) dx \quad (3.25)$$

onde $F_R(x)$ é a probabilidade de $R \leq x$ e $f_R(x)$ representa a probabilidade do efeito da acção S tomar valores entre x e $x + \Delta x$ ($\Delta x \rightarrow 0$). O integral de todos os x possíveis devolve a probabilidade de total de rotura.

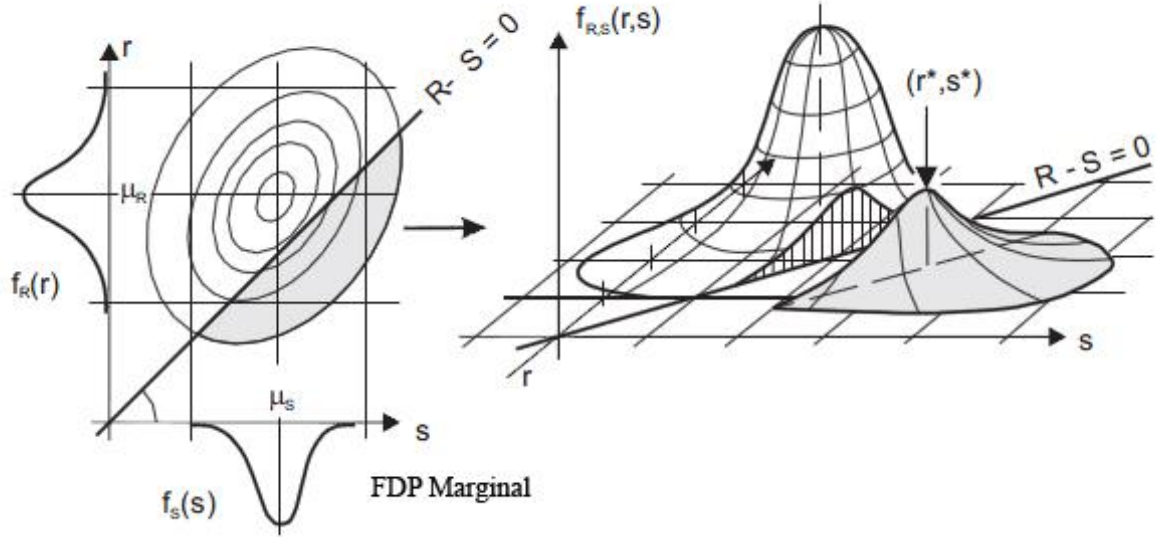


Fig. 3.3 – Função densidade conjunta de duas variáveis $f_{R,S}(r,s)$, funções densidade probabilidade marginal $f_R(r)$ e $f_S(r)$ e a sombreado o domínio de rotura (Adaptado de Schneider, 1997).

3.3.3 DEFINIÇÃO DO ÍNDICE DE FIABILIDADE

Em alguns casos particulares é possível resolver a equação 3.25 analiticamente, quando por exemplo as variáveis R e S são normalmente distribuídas e com valores médios μ_R e μ_S e desvios padrão σ_R e σ_S respectivamente. Definindo assim uma nova variável, Z , chamada de “margem de segurança”:

$$Z = R - S \quad (3.26)$$

e usando o teorema que explicita que a soma/subtracção de variáveis normais aleatórias é também uma variável normal com média μ_Z e desvio padrão σ_Z definido como:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (3.27)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (3.28)$$

a probabilidade de rotura P_f pode ser expressa através da seguinte equação:

$$P_f = P(R - S < 0) = P(Z < 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta) \quad (3.29)$$

Na equação 3.29 Φ é a função distribuição normal reduzida com média zero e desvio padrão unitário e β é o chamado “índice de fiabilidade” frequentemente referido como índice de fiabilidade de Cornell. O índice de fiabilidade de Cornell pode ser interpretado como o número de desvios padrão σ_Z que são necessários subtrair ao valor médio μ_Z para exceder o valor zero (ver fig. 3.4).

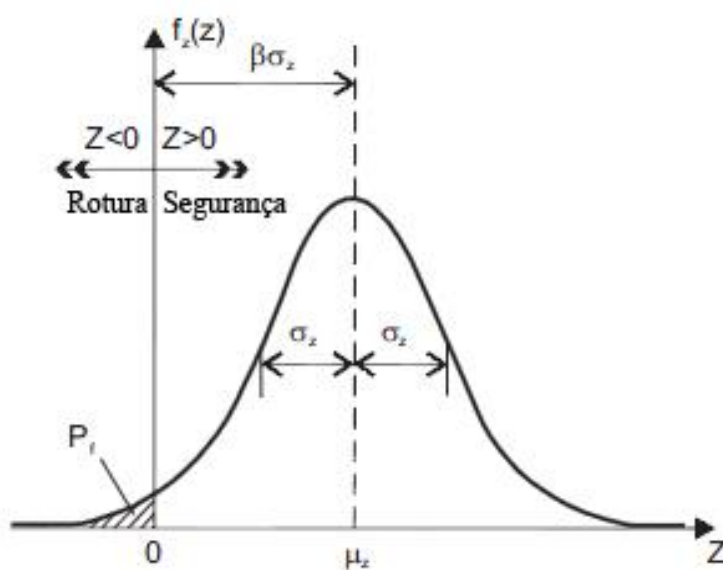


Fig. 3.4 – Distribuição da margem de segurança $Z = R - S$ (adaptado de Melchers, 1999).

Substituindo μ_z e σ_z pelas equações 3.27 e 3.28, e retirando a definição de β da equação 3.29 o índice de fiabilidade de Cornell pode ser reescrito como:

$$\beta_C = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.30)$$

Esta definição do índice de fiabilidade proposto por Cornell apenas é válida para variáveis normais aleatórias e independentes.

Tendo em vista este parâmetro, o índice de fiabilidade, é necessário estabelecer valores indicativos que permitam analisar a segurança de uma estrutura. Visto que os Eurocódigos já se encontram em vigor em grande parte dos países Europeus e está em vias de entrar em vigor em Portugal são os valores recomendados por este regulamento os quais terão mais interesse apresentar. Desta forma o Eurocódigo 0, EC-0 (2002), no seu anexo B, apresenta os valores alvo do índice de fiabilidade para o Estado Limite Último, ELU, Estado Limite de Utilização, ELS e para Estado Limite de Fadiga, ELF, e encontram-se resumidos no quadro 3.1. Os índices de fiabilidade encontram-se divididos em dois conjuntos de valores para dois períodos de referência diferentes, 1 ano e 50 anos respectivamente. Além disso, no caso dos ELU são apresentados vários valores correspondendo a diferentes classes de fiabilidade. As classes de fiabilidade RC-1, RC-2 e RC-3, corresponde às consequências de rotura, baixa, média e alta respectivamente. As consequências de rotura encontram-se relacionadas com a perda de vidas humanas, económicas, sociais e consequências ambientais.

Quadro 3.1: Índice de fiabilidade alvo, β (EC-0, 2002).

Estado limite	Período de referência de 1 ano			Período de referência de 50 anos		
	RC-1	RC-2	RC-3	RC-1	RC-2	RC-3
Último	4.2	4.7	5.2	3.3	3.8	4.3
Fadiga	–	–	–	–	1.5–3.8 ^(a)	–
Utilização (irreversível)	–	2.9	–	–	1.5	–

Nota: (a) depende do grau de inspeção, reparação e tolerância ao dano.

Os valores do índice de fiabilidade apresentados no quadro 3.1 são valores indicativos para a avaliação da segurança de estruturas. Que para o caso da avaliação da segurança de estruturas existentes podem ser conservativos pois estes valores foram propostos principalmente para o projecto de pontes.

3.4 MÉTODOS DE ANÁLISE DE FIABILIDADE E ABORDAGEM COMPUTACIONAL DE PROBLEMAS

3.4.1 GENERALIDADES

A definição do índice de fiabilidade apresentado na secção anterior é válida para o caso de duas variáveis normais aleatórias independentes entre si R e S para a função estado limite linear $g(R,S) = R - S = 0$. Nas situações reais as funções estado limite $g(\cdot)$ são frequentemente não-lineares e dependentes de muitas, por vezes correlacionadas, variáveis aleatórias X_i .

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(X_i) = 0 \quad (3.31)$$

Os métodos que permitem estimar a probabilidade de rotura ou o índice de fiabilidade para funções estado limite mais complicadas e para variáveis aleatoriamente distribuídas são chamados de “métodos de análise de fiabilidade”. Estes podem ser separados em duas abordagens de cálculo: métodos analíticos ou métodos de simulação. Sendo alguns exemplos de métodos analíticos os seguintes, Método de Fiabilidade de Primeira e Segunda Ordem (ou do inglês First and Second Order Reliability Method, FORM e SORM). E dos métodos de simulação um exemplo a apresentar é o Método de Monte Carlo e algumas das suas variantes.

Destes métodos apresentados de simulação e analíticos, apenas serão abordados os conceitos inerentes aos métodos de simulação de Monte Carlo e suas variantes, mais concretamente o método do Hipercubo Latino. Por conseguinte para uma informação mais detalhada acerca dos métodos analíticos FORM e SORM, sugere-se a consulta da seguinte bibliografia: Henriques (1998), Melchers (1999), Nowak & Collins (2000).

3.4.2. MÉTODOS DE SIMULAÇÃO

Os métodos de simulação tratam o problema como uma sequência de acontecimentos e estimam o índice de fiabilidade por simulação. Estes podem ser o único método para obter a solução de modelos de grande dimensão ou complexidade, pois permitem calcular distribuições de probabilidades em lugar de apenas valores médios. Embora em muitos casos possam ser utilizados modelos simples que na análise de fiabilidade podem ser expressos por funções estado limite $g(X)$ explícitas. Todavia, em algumas situações, onde cargas impostas ou outras condições (por exemplo, corrosão das armaduras, delaminação do betão, fendilhação, etc.) podem conduzir a estrutura para comportamentos não-lineares em situações perto da rotura, assim sendo serão necessários modelos teóricos mais avançados. Nestes casos a função de desempenho $g(X)$ já não se encontra disponível de forma explícita. Tendo assim de ser computada através de um processo numérico tal como uma análise de elementos finitos (incluindo princípios de não-linearidade) ou outros métodos numéricos. Isto leva a outro nível de complexidade para a análise de fiabilidade que só é possível resolver usando métodos de simulação.

Nas últimas décadas, foram propostas várias abordagens computacionais que permitem realizar análises de fiabilidade para as funções de desempenho implícitas. De acordo com Haldar & Mahadevan (2000a) estes podem ser amplamente divididos em três categorias, baseadas na sua filosofia base: simulação de Monte Carlo (incluindo métodos de amostragem eficientes e técnicas de

redução da variância), o método da Superfície de Resposta e uma Análise de Sensibilidade (incluindo o Método dos Elementos Finitos Estocásticos). Dos vários métodos e análises referidas no âmbito deste trabalho apenas será abordada a simulação de Monte Carlo. Como tal para mais informações referentes aos outros métodos acima referidos pode-se consultar a seguinte bibliografia específica: para o método da Superfície de Resposta (Haldar & Mahadevan, 2000b) e para a Análise de Sensibilidade (Teigen *et al.*, 1991; Val *et al.*, 1996; Val *et al.*, 1997).

3.4.2.1. Simulação de Monte Carlo

O mais intuitivo e provavelmente o mais comumente utilizado método de fiabilidade estrutural é a técnica de simulação de Monte Carlo. Usando esta técnica é possível calcular a probabilidade de rotura ou violação do estado limite através de funções estado limite $g(x)$ explícitas e implícitas empregando os mais básicos fundamentos da probabilística e estatística. A simulação de Monte Carlo é uma técnica baseada no conceito de amostragens aleatórias com o intuito de simular artificialmente um grande número de experiências e observar os seus resultados. O método da simulação de Monte Carlo também permite avaliar problemas muito complicados definidos por funções implícitas complexas desde que esteja disponível um algoritmo (ex. código não-linear de Elementos Finitos ou código para análise de secções não-lineares) que permita computar a resposta estrutural, dados os valores das variáveis de entrada. Este método pode facilmente avaliar $g(X)$ para cada análise determinística e por consequência computar a probabilidade de rotura após realizar diversas análises determinísticas.

A mais simples técnica de simulação de Monte Carlo, por vezes chamada de técnica de simulação pura (“crude” Monte Carlo), pode ser explicada através dos seguintes seis passos (Haldar & Mahadevan, 2000b):

- Definição do problema em termos de todas as variáveis aleatórias.
- Quantificação das distribuições probabilísticas de todas as variáveis aleatórias em termos das suas distribuições e parâmetros.
- Simulação de valores para essas variáveis aleatórias com base nas suas distribuições.
- Avaliação do problema deterministicamente para cada conjunto de amostras de todas as variáveis aleatórias.
- Extrair a informação probabilística necessária a partir das N realizações (ex. determinar quantos conjuntos do total de N avaliados levam à rotura).
- Determinar a precisão e eficiência da simulação realizada.

Após a realização destes passos a probabilidade de rotura ou o índice de fiabilidade podem ser calculados seguindo duas abordagens diferentes.

Na primeira a probabilidade de rotura ou o índice de fiabilidade é calculado com base nos resultados do elevado número, z , da avaliação individual da função estado limite $g(X_i)$. Cada avaliação individual, k , da função estado limite é obtida utilizando realizações aleatórias x_{ki} das variáveis.

Sendo a probabilidade de rotura calculada da seguinte forma:

$$P_f \approx \frac{z_0}{z} \quad (3.32)$$

onde z é o número total de realizações de $g(X_i)$ e z_0 é o número de realizações para qual $g(X_i) < 0$. Quanto maior for o número de z mais precisa é a aproximação de P_f . Infelizmente para baixas probabilidades de rotura é necessário um elevado número de realizações para que o valor de P_f seja fiável.

Na segunda abordagem, alternativamente à contagem de z_0 e z , todas as realizações da função estado limite podem ser analisadas estatisticamente com o intuito de determinar a função distribuição de probabilidade correspondente, o valor médio μ_g e o desvio padrão σ_g . Subsequentemente, assumindo que as realizações de $g(X_i)$ são normalmente distribuídas, o índice de fiabilidade pode ser estimado como:

$$\beta \approx \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad (3.33)$$

e a correspondente probabilidade de rotura P_f pode ser calculada de acordo com a equação 3.29.

O conceito subjacente à simulação de Monte Carlo é muito simples, mas a sua aplicação à engenharia de análise de fiabilidade e a sua aceitação como um método alternativo de avaliação de fiabilidade depende principalmente da eficiência da simulação. Visto que a simulação de Monte Carlo requer um significativo número de amostras, este pode não ser muito prático quando a análise determinística requer um considerável esforço computacional como é o caso, quando são utilizados modelos não-lineares numa malha refinada de elementos finitos.

Como consequência do elevado número de amostras que este método requer, é fundamental avaliar o seu grau de confiança, de precisão, da estimativa da probabilidade de rotura, em função do número de amostras. Uma das formas é através da avaliação da variância ou coeficiente de variação (COV) de P_f (Haldar & Mahadevan, 2000a). A sua variância ou COV pode ser estimada considerando que cada simulação constitui uma prova de Bernoulli. Desta forma, o número de falhas em N provas de Bernoulli segue uma distribuição Binomial. Assim, a variância de P_f pode ser dada aproximadamente pela seguinte expressão:

$$\sigma_{P_f}^2 \approx \frac{(1 - P_f)P_f}{N} \quad (3.34)$$

Desta forma, o COV obtêm-se da seguinte forma:

$$COV_{P_f} \approx \frac{\sqrt{\frac{(1 - P_f)P_f}{N}}}{P_f} \quad (3.35)$$

Quanto menor for o COV maior será a precisão estatística na obtenção da probabilidade de rotura.

Das equações anteriores, é possível verificar que, quando N tende para infinito, a variância e, consequentemente, o COV tendem para zero.

Outra forma de estudar o erro associado ao número de amostras é através da expressão sugerida por Shooman [1968 (em Haldar & Mahadevan, 2000a)], que indica o erro da estimativa de P_f para o número de amostras utilizado, N , com um nível de confiança de 95%:

$$erro(\%) = 200 \sqrt{\frac{1 - P_f}{N \cdot P_f}} \quad (3.36)$$

Para aprimorar a eficiência, o número de amostras necessárias necessita de ser muito reduzido. Técnicas de simulação mais avançadas, chamadas de técnicas de redução da variância, são frequentemente empregues tais como o método da Amostragem por Importância, o método da Amostragem direccional ou o método da Amostragem Estratificada (mais concretamente o método do Hipercubo Latino). Estes métodos avançados baseiam-se nos mesmos princípios que o método de Monte Carlo mas empregam algumas modificações teóricas que permitem reduzir a variância do erro da variável resultante sem afectar o valor médio e sem aumentar a dimensão da amostra. Dos métodos referidos para a redução da variância apenas o método do Hipercubo Latino será alvo de uma descrição mais pormenorizada na secção seguinte. Assim sendo para mais informação acerca dos restantes métodos pode-se consultar por exemplo a seguinte literatura: Melchers (1999).

3.4.2.2. Método do Hipercubo Latino

O método do Hipercubo Latino, tal como já foi referido, é um tipo especial da simulação numérica de Monte Carlo descrita que utiliza a estratificação da probabilidade teórica das funções distribuição das variáveis aleatórias de entrada. Este método baseia-se na divisão do domínio de cada variável aleatória em k intervalos disjuntos, com igual probabilidade de ocorrência. Cada intervalo é representado por uma amostra cujo parâmetro é representado pelo valor correspondente ao seu centro de gravidade, definido de acordo com a função densidade de probabilidade. Cada intervalo é considerado apenas uma única vez, sendo, por isso, o número de simulações igual ao número de intervalos considerado ($N = k$). A escolha do intervalo interveniente em cada simulação é feita aleatoriamente (Fig. 3.5).

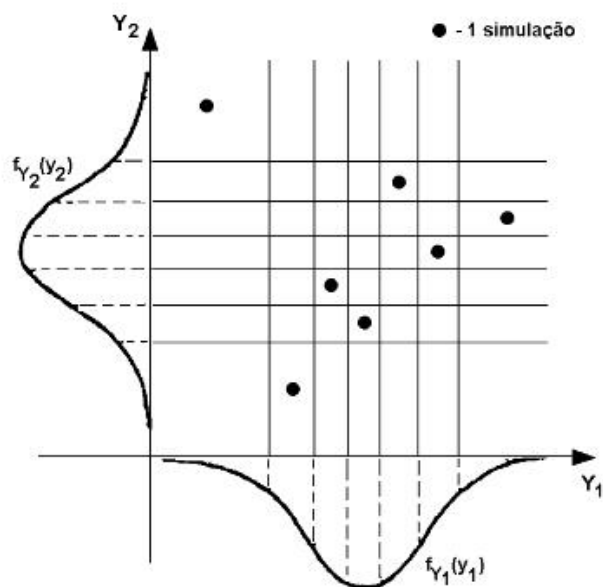


Fig. 3.5 – Método do Hipercubo Latino (Henriques, 1998).

A aplicação deste método pode ser resumida nos seguintes passos (Mahadevan, 1997):

- Divisão do domínio de cada variável básica, Y_i , em k regiões (intervalos), com igual probabilidade de ocorrência ($1/N$).
- Geração de k amostras de cada variável aleatória, uma amostra em cada região.
- Geração de k combinações aleatórias dos valores das diferentes variáveis, cada valor é utilizado apenas uma vez e todas as amostras são utilizadas.

- Avaliação da função estado limite, $g(X_i)$, para cada combinação, e registo do número de vezes que o estado limite é atingido ou ultrapassado, $N[g(X_i) \leq 0]$.
- Estimativa da probabilidade de rotura pela equação 3.32 ou 3.33.

Este algoritmo provou ser mais eficiente do que o da simulação de Monte Carlo pura (“crude Monte Carlo”) reduzindo substancialmente a variância da estimativa final dos parâmetros de saída. É necessário salientar, que os resultados deste método apenas são adequados quando as variáveis básicas envolvidas na definição da função estado limite têm uma distribuição normal ou aproximadamente normal.

Alguns autores têm apresentado refinamentos a este método, com o intuito de melhorarem a sua eficiência. O tratamento estatístico dos valores gerados, por exemplo pode conduzir a melhores resultados destas técnicas (Florian, 1992).

3.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE – FILTRAGEM DE VARIÁVEIS

Os modelos numéricos de análise estrutural envolvem geralmente um grande número de parâmetros com características aleatórias. A aplicação destes modelos é tanto mais eficaz, quanto menor for o número de variáveis relevantes a influenciar a variabilidade da resposta estrutural. A filtragem das variáveis mais importantes consiste num algoritmo que permite identificar quais as variáveis aleatórias relevantes para definir a variabilidade da resposta estrutural. As variáveis aleatórias irrelevantes serão consideradas com carácter determinístico. Desta forma, o número de variáveis aleatórias, intervenientes na definição da resposta estrutural, pode ser substancialmente reduzido permitindo diminuir o esforço computacional inerente a esta determinação. Como tal, a primeira tarefa a realizar é seleccionar as variáveis de interesse para avaliar a função aproximada da resposta. A filtragem das variáveis mais importantes pode por si só ser um processo demorado se o número de variáveis aleatórias for excessivo. Assim, o algoritmo proposto consiste na aplicação de uma técnica baseada no conceito de filtragem de agrupamentos de variáveis (Lo, 1998).

Os métodos correntes de filtragem de variáveis (“variables screening procedures”) consideram somente os coeficientes lineares que descrevem a relação entre as variáveis básicas e a resposta. Os efeitos devidos aos termos de ordem superior são, geralmente, pouco significativos em comparação com os de primeira ordem (Henriques, 1998). Um dos métodos mais simples para avaliar a sensibilidade da resposta, Y , em relação às variáveis básicas, X , consiste na determinação das derivadas parciais de Y em relação a cada variável X , isto é:

$$a_j = \left| \frac{\partial Y}{\partial X_j} \right| \quad (3.37)$$

onde a_j é uma medida de sensibilidade que representa a tangente da função de resposta, Y , em função da variável X_j . A avaliação numérica dessa sensibilidade é efectuada por diferenças finitas através de uma linearização secante do declive da função de resposta na região de interesse (fig. 3.6). Para cada variável básica, X_j , os coeficientes de sensibilidade, b_j , são avaliados de acordo com a expressão:

$$b_j = \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X_j} \right| \quad (3.38)$$

A determinação deste quociente é realizada através da consideração de duas realizações idênticas do vector X , excepto nas componentes X_j que diferem entre si de uma quantidade finita (por exemplo,

uma vez o desvio padrão de X_j , $2 \cdot \sigma_{Xj}$). Se o produto $b_j \cdot \sigma_{Xj}$ for inferior a uma percentagem de 1% a 10% do valor máximo das quantidades $b_j \cdot \sigma_{Xj}$, a variável X_j é considerada irrelevante, não devendo, por isso, ser incluída na definição do modelo de resposta da estrutura. As restantes variáveis são consideradas relevantes devendo, por isso, ser incluídas na definição do modelo.

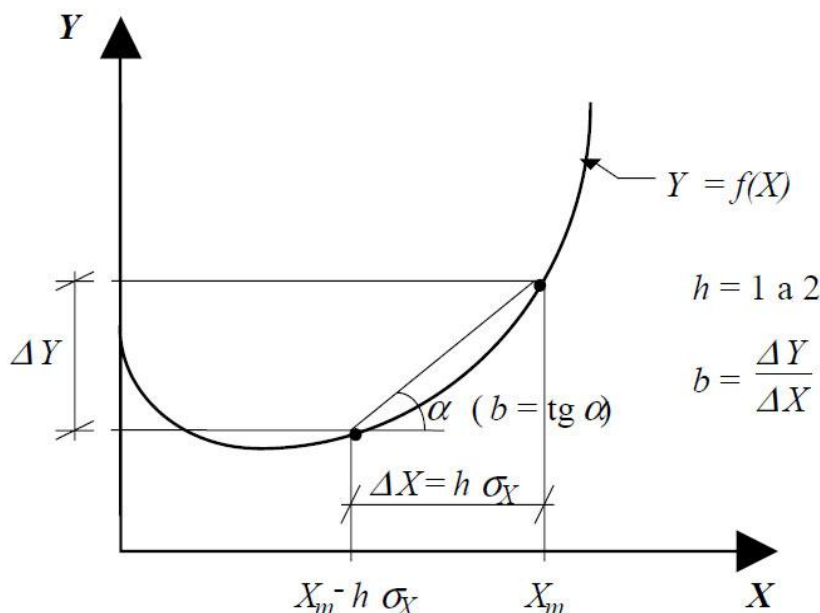


Fig. 3.6 – Avaliação dos coeficientes de sensibilidade b_j (Henriques, 1998).

Supondo que existem à partida p variáveis aleatórias para serem filtradas o procedimento descrito para avaliar os coeficientes de sensibilidade b_j , serão necessárias no mínimo $p+1$ análises estruturais para calcular todos os b_j . Ou seja, uma análise com os valores de referência (por exemplo, os valores médios) e para cada uma das p variáveis X_j considerar os valores de referência excepto a componente j desfasada da quantidade $h \cdot \sigma_{Xj}$. Quando p é grande mas o número de variáveis relevantes é pequeno, este procedimento é pouco eficiente porque envolve um número elevado de análises. Neste caso, utiliza-se um método de filtragem por fases baseado no conceito de filtragem de agrupamentos de variáveis (fig 3.7).

O método de filtragem por fases consiste em agrupar variáveis de natureza similar e avaliar o grau de importância de cada um dos grupos em vez de tratar cada uma das variáveis isoladamente. Assim, numa primeira fase é realizada uma filtragem dos grupos de variáveis. Seguidamente, os grupos relevantes são divididos em grupos mais pequenos e voltam a ser filtrados, até que as variáveis são filtradas individualmente. Dependendo da sensibilidade do utilizador para estimar à partida a importância das variáveis, usualmente duas fases de agrupamento são suficientes até realizar a filtragem das variáveis individualmente. Na figura 3.7 ilustra-se o algoritmo decorrente deste método e cujos passos se descreve:

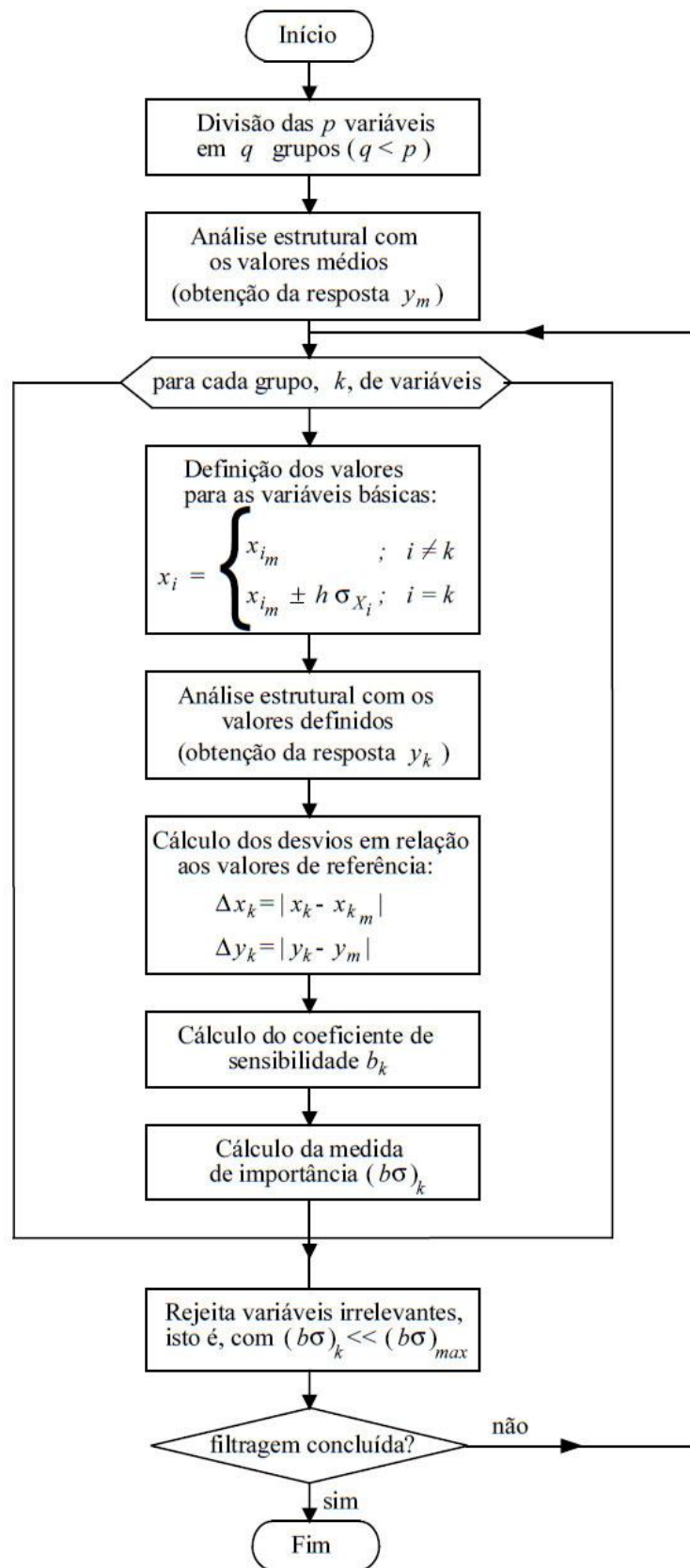


Fig. 3.7 – Algoritmo de filtragem de variáveis (Henriques, 1998).

- as p variáveis aleatórias são divididas em q grupos ($q < p$), de acordo com as opções definidas pelo utilizador.
- o processo de cálculo inicia-se com a realização de uma análise estrutural considerando os valores médios, X_m , de todas as variáveis aleatórias básicas. A resposta assim obtida é designada por Y_m (não confundir com o valor médio da resposta). Estes valores servem de referência para a avaliação dos desvios ΔX e ΔY .
- seguidamente são avaliados os coeficientes de sensibilidade, b_j , e as medidas de importância, $(b\sigma)_k$, para cada grupo, k , de variáveis através das seguintes etapas:
 - definição dos valores a atribuir às variáveis, considerando aquelas que não pertencem ao grupo k com os valores médios e as que pertencem a esse grupo desfasadas da quantidade $h \cdot \sigma_{X_j}$ dos valores médios, ou seja:

$$x_j \begin{cases} x_{im} & ; i \neq k \\ x_{im} \pm h \cdot \sigma_{x_j} & ; i = k \end{cases} \quad (h = 1) \quad (3.39)$$

onde x_{im} é o valor da variável X_i , σ_{X_j} é o seu desvio padrão e h é um coeficiente que define o desfasamento (na presente metodologia considera-se $h=1$), sendo esse desfasamento negativo se a variável contribui para a capacidade resistente da estrutura e positivo se a variável contribui para as acções aplicada.

- procede-se à análise estrutural considerando os valores definidos no ponto anterior, obtendo a resposta designada por y_k .
- avaliam-se os desvios das variáveis aleatórias em relação aos valores de referência utilizados na primeira análise:

$$\Delta x_k = |x_k - x_{km}| = h \cdot \sigma_{xk} \quad (3.40)$$

$$\Delta y_k = |y_k - y_m| \quad (3.41)$$

- calcula-se o coeficiente de sensibilidade através da seguinte expressão (que resulta da generalização da equação 3.38 para um grupo de variáveis):

$$b_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta y_k / y_m)}{(\Delta x_{ik} / x_{im})} \quad (3.42)$$

onde n é um número de variáveis pertencentes ao grupo k , $(\Delta y_k / y_m)$ e $(\Delta x_{ik} / x_{im})$ são os desvios relativos obtidos dos valores calculados pelas expressões 3.40 e 3.41 dividindo pelos respectivos valores de referência. Repare-se que estas expressões utilizam os desvios relativos em vez dos desvios absolutos, como acontece na expressão 3.38, para evitar o efeito das dimensões quando se comparam variáveis de diferente natureza.

- calcula-se a medida da importância resultante do produto do coeficiente de sensibilidade com o desvio padrão relativo (coeficiente de variação se o valor de referencia for o valor médio:

$$(b\sigma)_k = b_k \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{X_i}}{x_{im}} \quad (3.43)$$

- Uma vez concluído o ciclo sobre todos os grupos, determina-se o valor máximo, $(b\sigma)_{max}$, das medidas de importância, $(b\sigma)_i$, obtidas para cada grupo. De seguida calcula-se os valores das medidas de importância relativa, $(b\sigma)_i^{rel}$, em função do valor máximo mencionado:

$$(b\sigma)_i^{rel} = \frac{(b\sigma)_i}{(b\sigma)_{max}} \times 100\% \quad (3.44)$$

os grupos considerados irrelevantes, e por isso rejeitados, são aqueles cujo valor $(b\sigma)^{rel}$ é inferior a uma percentagem pré-definida pelo utilizador (entre 1% e 10%).

- O processo termina quando não houver sub-grupos de variáveis a considerar e as variáveis resultantes do processo de rejeição foram analisadas individualmente.

Como se pode verificar, de acordo com a descrição efectuada, um aspecto importante a considerar na filtragem por grupos de variáveis, é a definição apropriada das variáveis pelos diversos grupos. Este ponto depende sobretudo da experiência e do conhecimento que o utilizador tem sobre o comportamento estrutural e a forma como as variáveis o influenciam. No entanto, deve-se ter em conta que em cada grupo só deverá existir variáveis da natureza física, uma vez que é mais provável que sejam simultaneamente preponderantes ou não preponderantes para a resposta. O agrupamento de variáveis de diferente natureza física poderia eventualmente atenuar significativamente, ou mesmo anular, os efeitos. Mesmo que se tenha em atenção este aspecto, há a possibilidade de um grupo ser rejeitado porque os efeitos das variáveis desse grupo se anulariam. No entanto, a probabilidade de tal acontecer é muito reduzida.

3.6 VERIFICAÇÃO DA SIMULAÇÃO. TESTE DE HIPÓTESES.

A verificação da qualidade da simulação pode ser realizada através da execução de testes. Podendo estes ser divididos em duas classes: gráficos e numéricos.

Os testes gráficos consistem na representação dos resultados das simulações e das respectivas leis teóricas através de diagramas. Os casos mais simples consistem em traçar os histogramas e as curvas dos valores acumulados (Fig. 3.8), de forma a permitir a rápida visualização do ajuste por comparação com as curvas das respectivas leis teóricas. Estes testes são puramente qualitativos devendo por isso ser complementados por outras verificações.

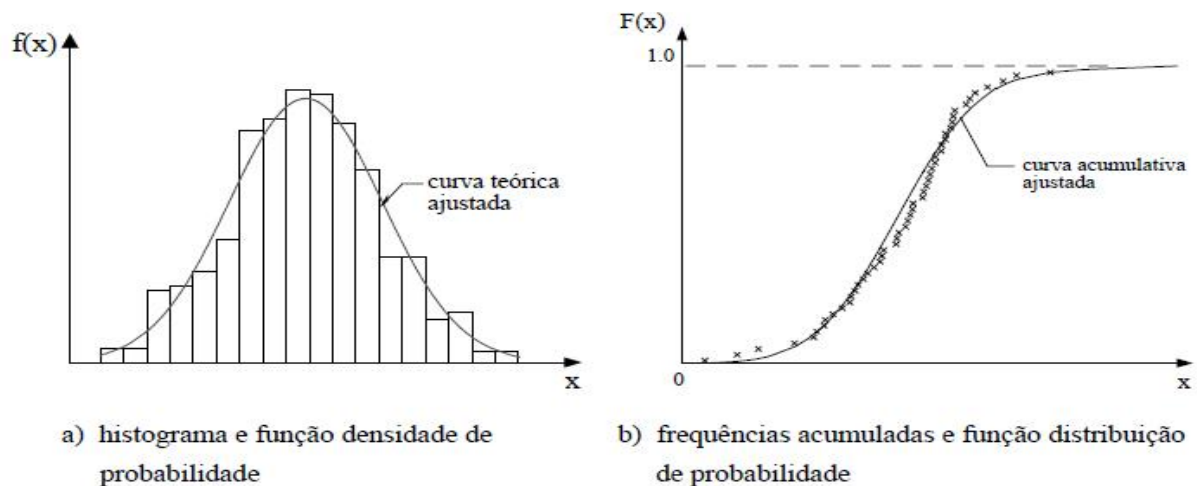


Fig. 3.8 – Testes de hipóteses baseados em representações gráficas (Henriques, 1998).

Os testes de hipóteses numéricos, são: o teste de normalidade (aplicável somente a distribuições gausseanas) baseado nas estimativas dos coeficientes de assimetria, γ_1^* , e de achatamento γ_2^* e o teste de Kolmogorov-Smirnov na forma da sua variante, o teste de Lilliefors (Lilliefors, 1967). Pois o teste de Kolmogorov-Smirnov na sua formulação original apenas é aplicável se os parâmetros das leis teóricas não forem estimados a partir dos valores simulados. Desta forma a sua variante, o teste de Lilliefors, permite a realização do teste quando tal acontece. De seguida se apresentará os dois testes de hipóteses a realizar.

Teste de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e de achatamento.

A verificação aproximada das características gausseanas de uma distribuição estatística de uma variável aleatória é feita com base em duas propriedades características da lei de distribuição normal: os coeficientes de assimetria, γ_1 , e de achatamento γ_2 , são nulos. Na prática, os valores estimados dos coeficiente de assimetria, $\gamma_1^*(n)$, e de achatamento, $\gamma_2^*(n)$, estão inevitavelmente sujeitos a flutuações incontroláveis da amostragem, por isso, não é possível exigir a igualdade a zero destes coeficientes. Assim consideram-se aleatórios (estatisticamente não significativos) os desvios em relação a zero dos valores de $\gamma_1^*(n)$ e $\gamma_2^*(n)$ não superior a uma vez e meia, ou duas vezes, os desvios padrão ($\sigma_{\gamma_1^*}$ e $\sigma_{\gamma_2^*}$) das características de amostragem correspondentes.

O procedimento de verificação da normalidade consiste nos seguintes passos (Henriques, 1998):

- estimativa dos coeficientes de assimetria,

$$\gamma_1^*(n) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^3}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right]^{3/2}} \quad (3.45)$$

e de achatamento,

$$\gamma_2^*(n) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \right]^2} - 3 \quad (3.46)$$

- cálculo dos desvios padrão de $\gamma_1^*(n)$ e $\gamma_2^*(n)$:

$$\sigma_{\gamma_1^*} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} \quad (3.47)$$

$$\sigma_{\gamma_2^*} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} \quad (3.48)$$

- se forem verificadas as duas seguintes condições:

$$\begin{cases} \left| \gamma_1^*(n) \right| < 1.5\sigma_{\gamma_1}^* \\ \left| \gamma_2^* + \frac{6}{n+1} \right| < 1.5\sigma_{\gamma_2}^* \end{cases} \quad (3.49)$$

aceita-se a hipótese de normalidade da variável aleatória. Se, pelo contrário, uma das seguintes condições:

$$\begin{cases} \left| \gamma_1^*(n) \right| \geq 2.0\sigma_{\gamma_1}^* \\ \left| \gamma_2^* + \frac{6}{n+1} \right| \geq 2.0\sigma_{\gamma_2}^* \end{cases} \quad (3.50)$$

se verificar, rejeita-se a hipótese de normalidade. Nos restantes casos será necessário realizar uma verificação complementar usando outros testes de hipóteses (como por exemplo o Teste de Kolmogorov-Smirnov apresentado a seguir).

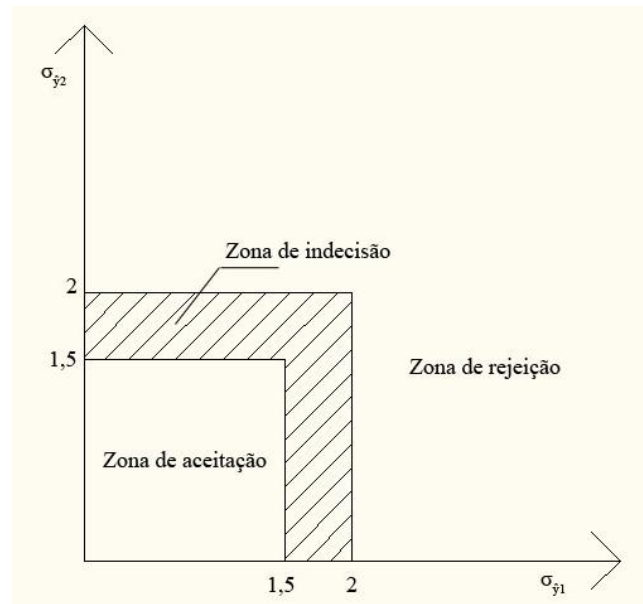


Fig. 3.9 – Testes de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e de achatamento.

Teste de Kolmogorov-Smirnov modificado – versão proposta por Lilliefors (1967).

O presente teste consiste em verificar o ajuste da distribuição estatística da variável aleatória X a uma lei teórica de distribuição de qualquer tipo. Baseia-se no estudo estatístico das diferenças $F(x) - F^*(x)$, sendo $F^*(x)$ a distribuição estatística (caracterizada pelos valores acumulados das frequências dos valores simulados) da variável X e $F(x)$ a função de distribuição da lei teórica a testar.

O procedimento de verificação do ajuste consiste nos seguintes passos (Henriques, 1998):

- ordenação (em forma crescente) dos n valores observados (x_1, x_2, \dots, x_n);

- cálculo das frequências acumuladas, $F^*(x_i)$, e da função distribuição da lei teórica considerada, $F(x_i)$, para todos os n valores;
- cálculo do valor absoluto da máxima diferença:

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} |F(x_i) - F^*(x_i)| \quad (3.51)$$

- cálculo do coeficiente de distribuição de D_n^* :

$$D_n^* = D_n \left(\sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.52)$$

- verificação do ajuste através do cálculo da probabilidade (ver valores do quadro 3.2):

$$P(D_n^* < \lambda) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2} \quad (3.53)$$

Se $P(D_n^* < \lambda) \leq \alpha$, sendo α o nível de significância exigido, rejeita-se a hipótese da lei teórica proposta, caso contrário aceita-se. Valores de α da ordem de 0.05 são comuns para este tipo de teste.

Quadro 3.2: Probabilidade do afastamento máximo entre $F^*(x)$ e $F(x)$ devido aos factores aleatórios seja não inferior ao valor observado.

D_n^*	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
$P(D_n^* < \lambda)$	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,964	0,864	0,711	0,544	0,393	
D_n^*	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$P(D_n^* < \lambda)$	0,270	0,178	0,112	0,068	0,040	0,022	0,012	0,006	0,003	0,002	0,001

3.7 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta secção é apresentado um exemplo de verificação da segurança de uma viga de betão armado (C25/30 e S500) simplesmente apoiada, com as características presentes na seguinte figura:

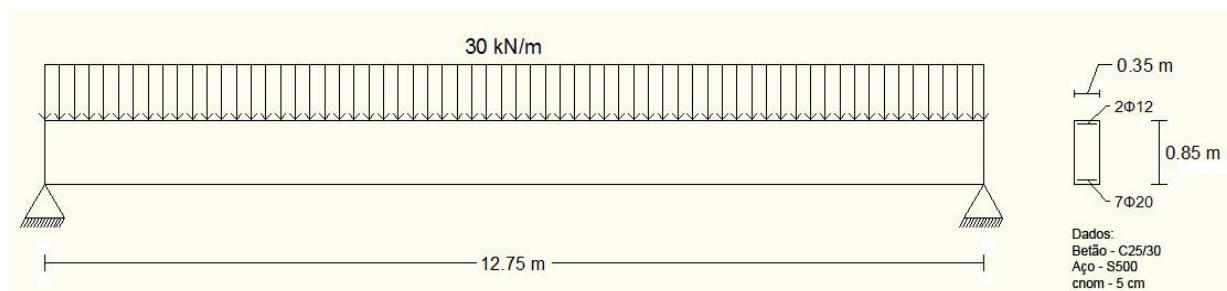


Fig. 3.10 – Viga simplesmente apoiada, com suas características.

Por simplificação, foi assumido que a viga em questão é solicitada por uma carga uniformemente distribuída, peso próprio incluído, de $g=30 \text{ kN/m}$ ($\gamma_g=1,35$). Sendo desta forma o momento actuante de cálculo, a meio vão, igual a $M_{Sd}=610 \text{ kNm}$.

Assim será feita uma verificação da segurança através de um método determinístico. De seguida aumentou-se a carga distribuída em 5 kN/m passando esta a ser igual a 35 kN/m . Será feita nova verificação determinística, se esta verificação não se umprir será feita uma verificação probabilística

mais refinada através do método Monte Carlo e o método do Hipercubo Latino. É ainda efectuada uma comparação entre os dois métodos.

Verificação pelo método determinístico.

Para se realizar a verificação determinística da segurança da viga simplesmente apoiada em questão foram tidas em conta as variáveis que se encontram caracterizadas no quadro 3.3.

Quadro 3.3: Caracterização das variáveis utilizadas na verificação determinística.

Variável	Descrição	Valor característico
f_c	Tensão de rotura do betão C25/30	25 MPa
f_{sy}	Tensão de cedência da armadura (aço S500)	500 MPa
A_{si}	Área da armadura inferior	21,99 cm ²
A_{ss}	Área da armadura superior	2,26 cm ²
γ_s	Coeficiente de segurança referente aos aços	1,15
γ_c	Coeficiente de segurança referente ao betão	1,5
b	Largura da viga	0,35 m
d	Altura útil	0,80 m
c	recobrimento	0,05 m

Nesta verificação para o cálculo da posição do eixo neutro da secção e subsequente momento resistente recorreu-se ao diagrama de forças rectangular presente no EC-2 (2004), parte 1-1, secção 3.1.7 (3) e realizou-se o equilíbrio das forças tal como ilustrado na seguinte figura:

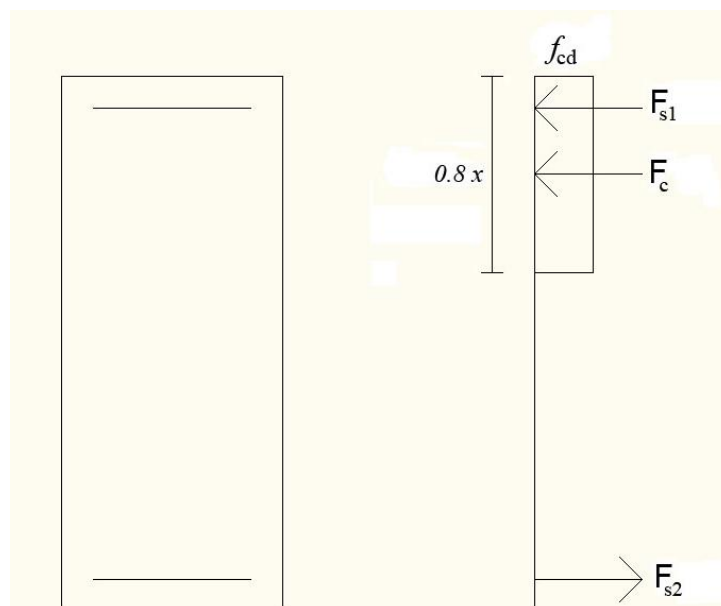


Fig. 3.11 – Diagrama das forças presentes na secção.

$$F_{s2} = F_{s1} + F_c \quad (3.54)$$

$$\frac{500000}{1.15} \times 21.99 \times 10^{-4} = \frac{500000}{1.15} \times 2.26 \times 10^{-4} + \frac{25000}{1.5} \times 0.35 \times 0.8x \Leftrightarrow x = 0.184m \quad (3.55)$$

Tendo agora a posição do eixo neutro, $x=0,184\text{ m}$, da face superior da secção da viga realizando um equilíbrio dos momentos de todas as forças envolvidas em relação à face superior é possível determinar o valor do momento resistente da secção como ilustra a figura 3.12.

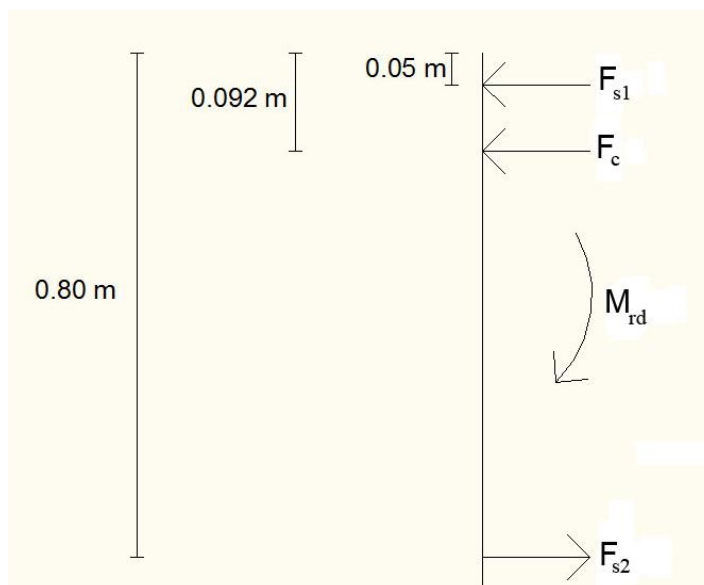


Fig. 3.12 – Diagrama das forças e respectivos braços presentes na secção.

$$\sum M = 0 \quad (3.56)$$

$$M_{Rd} = 0.8 \cdot F_{s2} - 0.05 \cdot F_{s1} - \frac{0.8x}{2} F_c \quad (3.57)$$

$$M_{Rd} = 0.8 \cdot F_{s2} - 0.05 \cdot F_{s1} - \frac{0.8x}{2} F_c \Leftrightarrow M_{Rd} = 697kNm \quad (3.58)$$

Desta forma o momento resistente é $M_{rd}=697\text{ kNm}$. Assim fazendo a verificação de segurança:

$$M_{sd} \leq M_{Rd} \Leftrightarrow 610kNm \leq 697kNm \quad OK \quad (3.59)$$

conclui-se que a viga em questão apresenta resistência suficiente para o carregamento presente, sendo portanto segura.

Agora, tal como referido acima, proceder-se-á a um acréscimo da carga distribuída de 5 kN/m , devido por exemplo a uma alteração do uso da estrutura onde a viga em questão está inserida, passando o carregamento a ser $g=35\text{ kN/m}$. Com esta nova carga distribuída o momento actuante a meio vão da estrutura toma o novo valor de $M_{sd}=711,2\text{ kNm}$, realizando novamente a verificação presente na equação 3.59:

$$M_{sd} \leq M_{Rd} \Leftrightarrow 711.2kNm > 697kNm \quad KO \quad (3.60)$$

o momento actuante passa a ser superior ao momento resistente da estrutura. Passando a estrutura segundo uma análise determinística a ser insegura.

Visto tal ter acontecido será feita agora uma verificação da segurança, tal como foi referido, através de métodos probabilísticos.

Verificação através de métodos probabilísticos.

Esta verificação vai ser dividida em duas partes, uma por cada método de simulação descrito na secção anterior do presente capítulo, ou seja, o método de simulação de Monte Carlo e o método do Hipercubo Latino. Para se realizar a verificação da segurança através destes métodos é necessário que todas as variáveis envolvidas no problema estejam descritas estatisticamente. Estas encontram-se resumidas no quadro 3.4.

Quadro 3.4: Caracterização das variáveis utilizadas na verificação probabilística.

Variável aleatória	Descrição	Valor médio	Desvio padrão	Tipo de distribuição
f_c	Tensão de rotura do betão C25/30	37,8 MPa	2,911 MPa	Normal
f_{syi}	Tensão de cedência da armadura inferior (aço S500, $\Phi 20$)	594 MPa	31 MPa	Normal
A_{si}	Área da armadura inferior	21,99 cm ²	0,4398 cm ²	Normal
f_{sys}	Tensão de cedência da armadura superior (aço S500, $\Phi 12$)	606 MPa	37 MPa	Normal
A_{ss}	Área da armadura superior	2,26 cm ²	0,0452 cm ²	Normal
b	Largura da viga	0,35 m	0,007 m	Normal
d	Altura útil	0,80 m	0,016 m	Normal
c	recobrimento	0,05 m	0,001 m	Normal

Nota: Dados estatísticos adaptados de Wiśniewski (2007).

Resolução pelo método de Monte Carlo.

Para a resolução do problema a questão, estando já as variáveis envolvidas descritas estatisticamente, falta definir a expressão que define o problema. Em primeira análise será utilizada uma expressão simplificada do problema, a expressão em questão é a seguinte:

$$M_R = 0.9 \cdot d \cdot A_{si} \cdot f_{syi} \quad (3.61)$$

Como tal, apesar de serem apenas três as variáveis intervenientes na determinação do momento resistente da secção da viga, será agora realizado um processo de análise de sensibilidade para determinar se alguma destas variáveis não apresenta real preponderância na expressão. Esta filtragem das variáveis será realizada de acordo com o algoritmo de cálculo proposta na secção 3.5. O desfaseamento considerado nesta análise foi considerado igual a 1 ($h = 1$, equação 3.39). Assim, tomando em consideração as equações 3.42, 3.43 e 3.44, o resultado desta análise de sensibilidade vem expresso no seguinte quadro:

Quadro 3.5: Resultado da análise de filtragem das variáveis para a expressão 3.61.

i	Variáveis aleatórias	b_i	$(b\sigma)_i$	$(b\sigma)_i^{rel}$
1	d	100.00%	5.22%	85.48%
2	A_{si}	102.27%	2.05%	33.50%
3	f_{syi}	100.00%	6.11%	100.00%

Analisando o quadro 3.5, denota-se, como seria de esperar, que todas as variáveis intervenientes na obtenção do momento resistente pela expressão 3.61, são consideradas relevantes. Pois o coeficiente de sensibilidade relativo, $(b\sigma)_i^{rel}$, de todas as variáveis é superior a 10%.

Assim, com as variáveis descritas e a equação que descreve o problema definida realizaram-se 6 séries de simulações com uma amostragem de cada variável igual a 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000 e 10.000.000 respectivamente. Estando os resultados destas simulações presentes no seguinte quadro:

Quadro 3.6: Resultados do momento resistente pelo método de Monte Carlo, para a hipótese 1.

M_R \ N	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Valor médio (μ_{MR} , kNm)	939,8235	941,3889	939,6700	940,4713	940,3756	940,457
Desvio padrão (σ_{MR} , kNm)	54,5384	55,0207	56,2227	55,9239	55,8007	55,8303

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov

E os histogramas, respectivamente das 100, 1.000 e 10.000 amostragens nas figuras que se seguem:

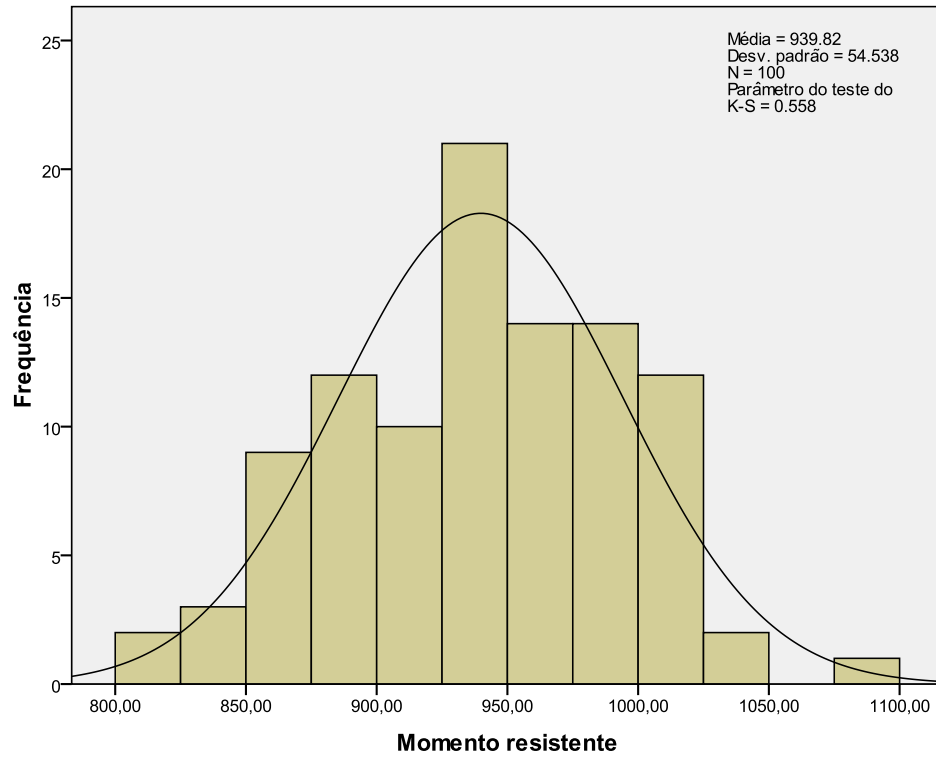


Fig. 3.13 – Histograma do momento resistente para simulação das 100 amostras, hipótese 1.

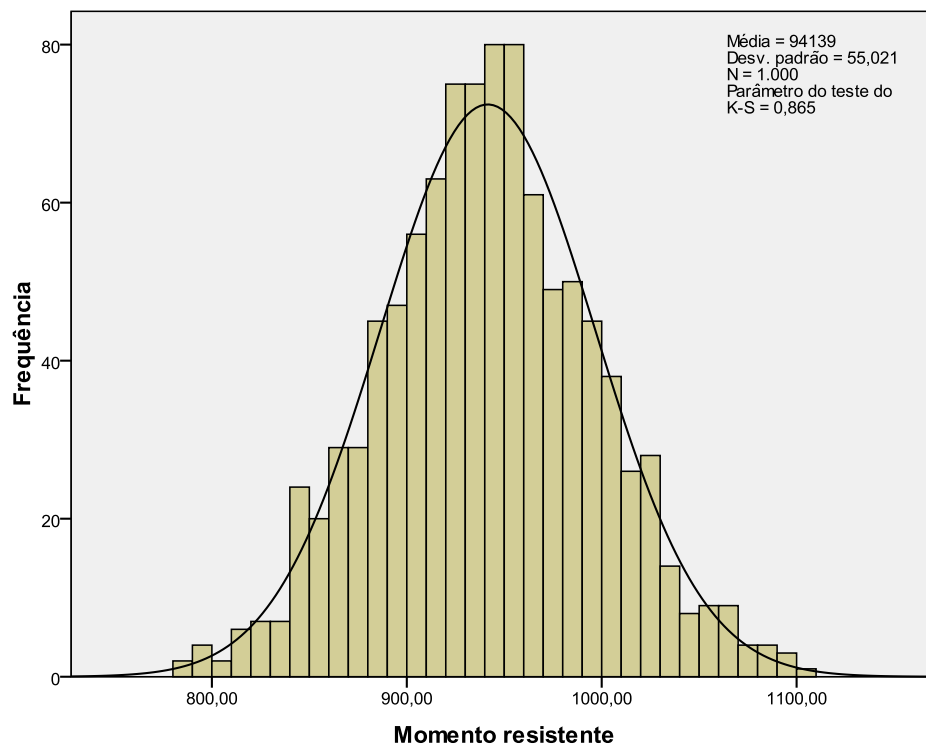


Fig. 3.14 – Histograma do momento resistente para simulação das 1.000 amostras, hipótese 1.

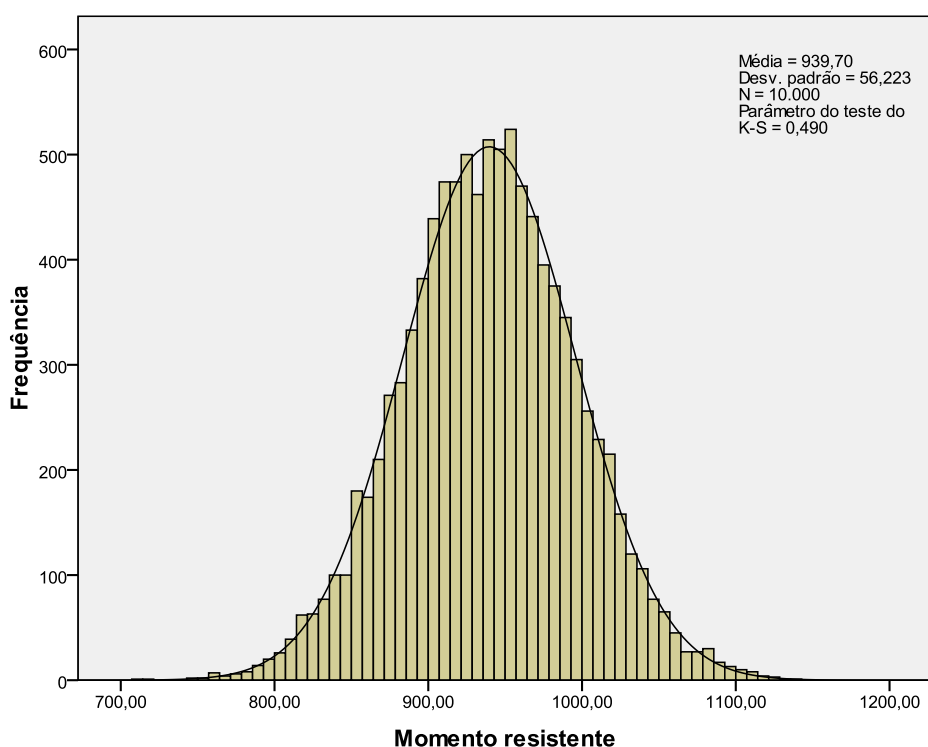


Fig. 3.15 – Histograma do momento resistente para simulação das 10.000 amostras, hipótese 1.

Desta forma a única variável que falta definir estatisticamente é o momento actuante, como não se possui dados relativos à sua variação foi assumido que o momento actuante partilha das mesmas características que o momento resistente, mais precisamente têm o mesmo coeficiente de variação, COV.

$$COV(\%) = \frac{55.9384}{940.6942} \times 100 = 5.95\% \quad (3.62)$$

O valor médio deste momento é igual ao seu valor determinístico e o seu desvio padrão é determinado da seguinte forma:

$$\sigma_{M_S} = COV \cdot \mu_{M_S} = 0.0595 \times 711.2109 = 42.2922 \text{ kNm} \quad (3.63)$$

Assim as características estatísticas do momento actuante são as descritas no seguinte quadro:

Quadro 3.7: Resumo das características estatísticas do momento actuante.

Variável	Valor Médio (μ)	Desvio padrão (σ)
M_S	711,2109 kNm	42,2922 kNm

Com estes dados todos já é possível, através da equação 3.26, calcular a variável, Z , chamada de margem de segurança, onde:

$$Z = M_R - M_S \quad (3.64)$$

Sendo o valor médio e o desvio padrão da variável, Z , calculado de acordo com as expressões 3.27 e 3.28 respectivamente:

$$\mu_Z = \mu_{M_R} - \mu_{M_S} \quad (3.65)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{M_R}^2 + \sigma_{M_S}^2} \quad (3.66)$$

e por conseguinte o respectivo índice de fiabilidade, β , e a probabilidade de rotura, P_f , recorrendo às 3.30 e 3.29:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (3.67)$$

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.68)$$

e o erro associado a cada simulação através da expressão 3.36. Tendo isto tudo em conta é possível resumir os resultados desta hipótese da simulação no quadro 3.8.

Quadro 3.8: Resultados da margem de segurança pelo método de Monte Carlo, hipótese 1.

Z	N	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Valor médio (μ_Z)		228,6126	230,1780	228,4887	229,2604	229,1647	229,2461
Desvio padrão (σ_Z)		69,0149	69,3967	70,3535	70,1150	70,0168	70,0403
Índice de fiabilidade (β)		3,31	3,32	3,25	3,27	3,27	3,27
Probabilidade de rotura (P_f)		4,62E-04	4,55E-04	5,82E-04	5,38E-04	5,32E-04	5,32E-04
Erro (%)		1135,19	360,97	115,72	36,47	8,67	2,74

Com base neste quadro e tendo em conta os valores do índice de fiabilidade presentes no quadro 3.1, pode-se concluir que a viga, se se tiver em conta a classe de fiabilidade RC-1 está no limiar da segurança e se for tido em conta a classe RC-2 esta continua a ser insegura.

Desta forma será feito o cálculo do momento resistente de uma forma mais precisa através das seguintes equações:

$$x = \frac{F_{syi} \cdot A_{Si} - F_{sys} \cdot A_{ss}}{F_c \cdot b \cdot 0.8} \quad (3.69)$$

$$M_R = d \cdot A_{Si} \cdot F_{syi} - c \cdot A_{ss} \cdot F_{sys} - \frac{0.8 \cdot x}{2} \cdot F_c \cdot b \cdot 0.8 \cdot x \quad (3.70)$$

Servindo a primeira para o cálculo mais preciso da posição do eixo neutro da secção que será depois utilizada na segunda expressão permitindo que o cálculo do momento resistente seja efectuado com maior precisão.

Assim, tal com na hipótese anterior, foi realizado um processo de análise de sensibilidade de forma a permitir uma redução das variáveis que intervêm no problema. Esta análise nesta fase foi dividida em duas, uma primeira no respeitante à expressão que define a posição do eixo neutro da secção e uma segunda que permite obter o momento resistente da secção. Considerado igualmente um desfasamento igual a 1 ($h = 1$), e as equações 3.42, 3.43 e 3.44, o resultado da análise de sensibilidade para a expressão da obtenção da posição do eixo neutro vem expresso no quadro 3.9.

Quadro 3.9: Resultado da análise de filtragem das variáveis para a expressão 3.69.

i	Variáveis aleatórias	b_i	$(b\sigma)_i$	$(b\sigma)_i^{rel}$
1	f_{syi}	110.98%	5.79%	68.82%
2	A_{si}	113.12%	2.26%	26.88%
3	f_{sys}	2.96%	0.18%	2.15%
4	A_{ss}	22.62%	0.45%	5.38%
5	f_c	109.29%	8.42%	100.00%
6	b	104.07%	2.08%	24.73%

Realizando uma interpretação dos resultados obtidos igual à anterior, pode-se concluir que a área e a tensão de cedência da armadura superior, não são consideradas relevantes para a obtenção da posição do eixo neutro. Assim, as variáveis que entram com carácter probabilístico nesta determinação são as seguintes: f_{syi} , A_{si} , f_c , e b . As restantes duas variáveis entram nesta determinação com o seu valor médio.

De igual forma apresentam-se no quadro 3.10 os resultados da análise de sensibilidade realizada para a determinação do momento resistente pela expressão 3.70.

Analisando o mesmo, o quadro 3.10, denota-se que das nove variáveis intervenientes na expressão 3.70, apenas quatro são consideradas relevantes. Nomeadamente as seguintes variáveis: d , f_{syi} , A_{si} e f_c .

Daqui se depreende que a variabilidade inerente à armadura de compressão tem uma intervenção insignificante quer na determinação do eixo neutro, quer na quantificação do momento resistente da secção. Observa-se também que a variabilidade desta posição do eixo neutro e a variabilidade da largura da secção da viga, são igualmente insignificantes para a obtenção do momento resistente. Desta forma, estas variáveis são tidas na quantificação do momento resistente como constantes, entrando como variáveis aleatórias apenas as variáveis acima expressas como relevantes.

Quadro 3.10: Resultado da análise de filtragem das variáveis para a expressão 3.70.

i	Variáveis aleatórias	b_i	$(b\sigma)_i$	$(b\sigma)_i^{rel}$
1	d	106.00%	2.12%	38.32%
2	f_{syi}	106.00%	5.53%	100.00%
3	A_{si}	108.41%	2.17%	39.19%
4	c	0.69%	0.01%	0.25%
5	f_{sys}	0.69%	0.04%	0.77%
6	A_{ss}	0.69%	0.01%	0.25%
7	f_c	11.16%	1.14%	20.68%
8	b	5.31%	0.41%	7.39%
9	x	5.31%	0.11%	1.92%

Analogamente à hipótese anterior foram realizados 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000 e 10.000.000 amostragens respectivamente, para o cálculo da posição do eixo neutro, x , pela equação 3.69, e com as propriedades estatísticas retiradas desta análise foi calculado o momento resistente respectivo recorrendo à expressão 3.70, encontrando-se os resultados expostos nos seguintes quadros:

Quadro 3.11: Resumo dos resultados da posição do eixo neutro.

x \ N	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Valor médio (μ_x , m)	0,1114	0,1114	0,1111	0,1112	0,1112	0,1112
Desvio padrão (σ_x , m)	0,01	0,0107	0,0113	0,0114	0,0114	0,0114

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov.

Quadro 3.12: Resultados do momento resistente pelo método de Monte Carlo, hipótese 2.

M_R \ N	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Valor médio (μ_{MR} , kNm)	990,8187	986,7899	986,0958	986,1481	985,9609	985,9009
Desvio padrão (σ_{MR} , kNm)	55,6590	55,2231	56,7929	56,6098	56,1346	56,1199

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov.

Tal como na hipótese anterior, apresenta-se agora também alguns histogramas das respostas da secção:

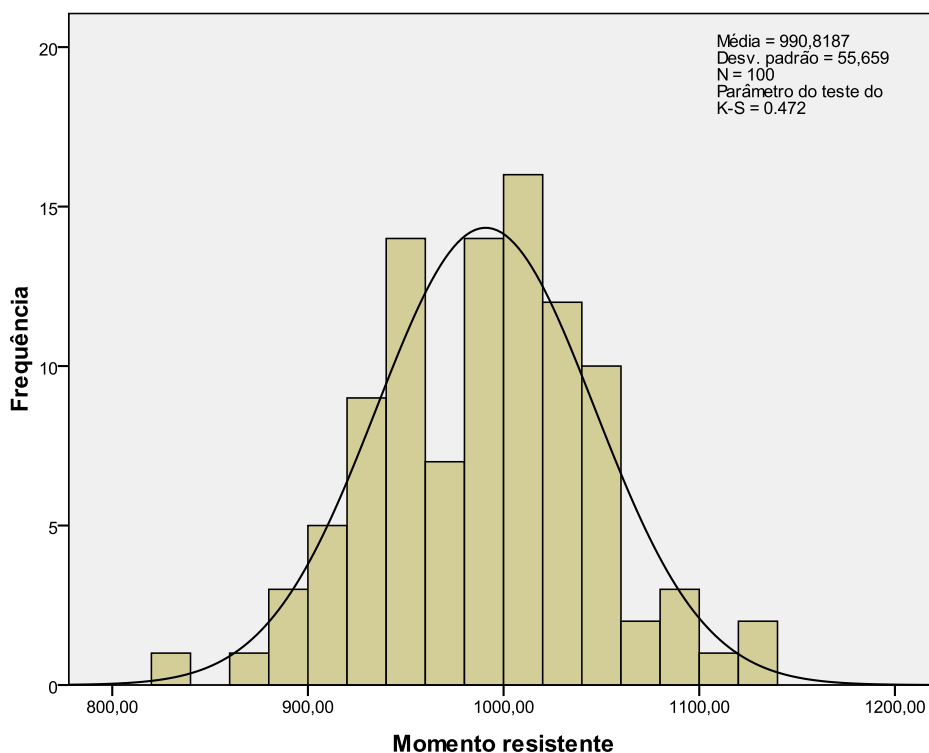


Fig. 3.16 – Histograma do momento resistente para simulação das 100 amostras, hipótese 2.

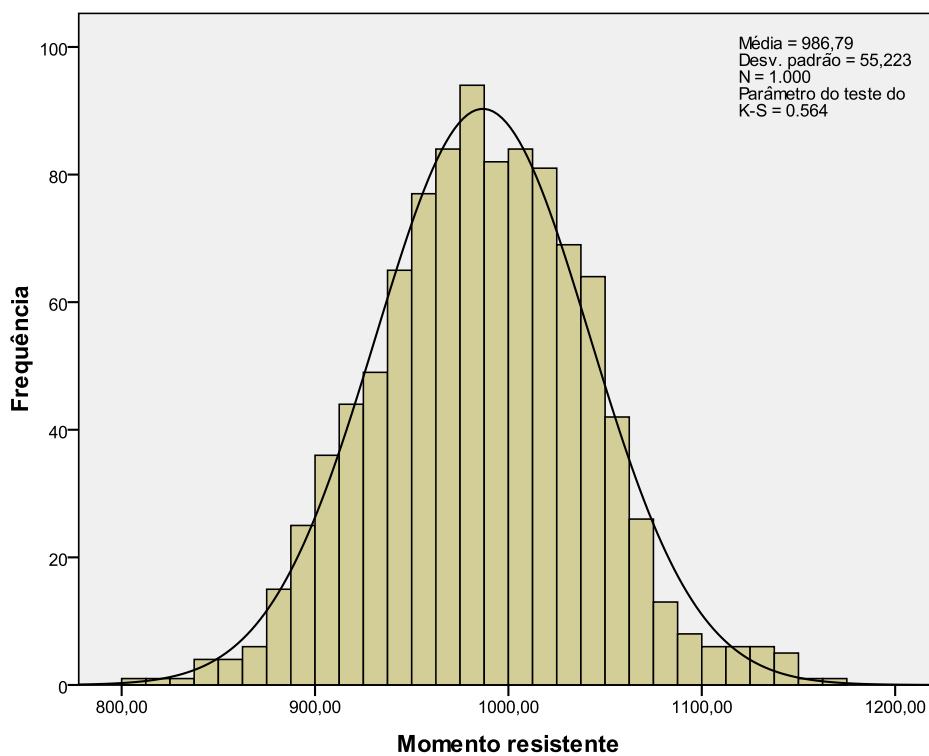


Fig. 3.17 – Histograma do momento resistente para simulação das 1.000 amostras, hipótese 2.

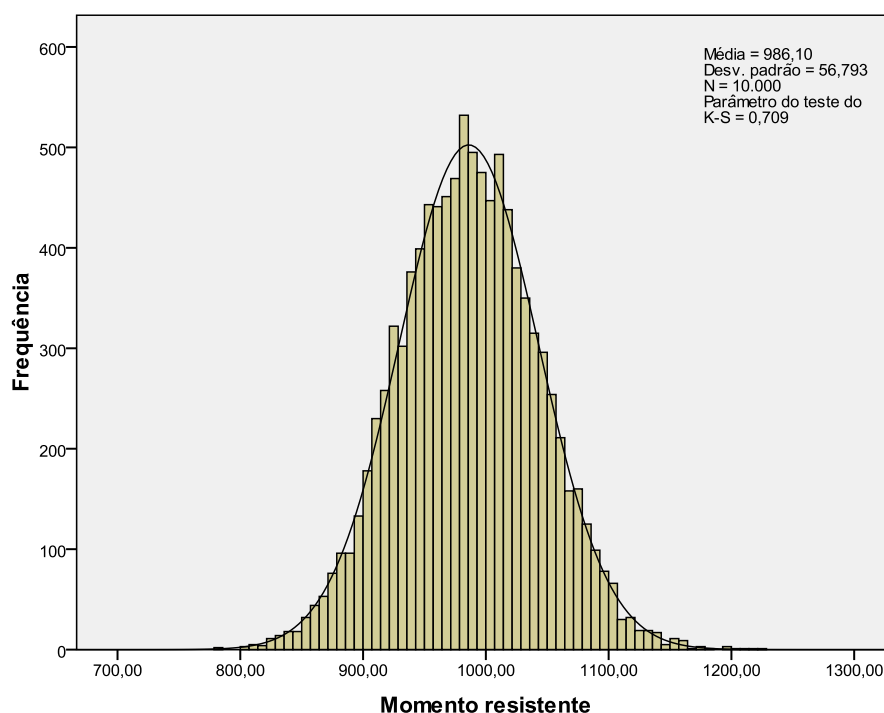


Fig. 3.18 – Histograma do momento resistente para simulação das 10.000 amostras, hipótese 2.

Da mesma forma que a hipótese anterior, de seguida foi calculada a margem de segurança, Z , e determinado o índice de fiabilidade e a probabilidade de rotura:

Quadro 3.13: Resultados da margem de segurança pelo método de Monte Carlo, hipótese 2.

Z \ N	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000
Valor médio (μ_z)	279,6078	275,5790	274,8849	274,9372	274,7500	274,6900
Desvio padrão (σ_z)	69,9039	69,5573	70,8101	70,6633	70,2831	70,2714
Índice de fiabilidade (β)	4,00	3,96	3,88	3,89	3,91	3,91
Probabilidade de rotura (P_f)	3,17E-05	3,72E-05	5,18E-05	5,00E-05	4,63E-05	4,63E-05
Erro (%)	1149,82	361,80	116,47	89,48	29,39	9,29

Utilizando uma formulação do problema mais precisa, o valor do índice de fiabilidade aumentou e por conseguinte a probabilidade de rotura diminuiu, desta forma a viga em questão já cumpre a classe de fiabilidade RC-2.

Analisando agora os resultados das duas simulações pode-se concluir que para a primeira hipótese o número de amostras que seriam necessárias, considerado apenas o erro calculado pela equação 3.36,

seriam 1.000.000 de amostras. Contudo as amostragens de 10.000 e 100.000 apresentam já uma boa precisão do valor do índice de fiabilidade, β , pois tendo sido realizadas 50 repetições do processo, o erro do valor máximo em relação ao valor mínimo obtido para β é respectivamente 2,5% e 1,26%.

Para a segunda hipótese, atendendo ao erro seriam necessárias 10.000.000 de amostras, mas tal como na primeira hipótese foram realizadas 50 repetições e foi possível concluir que as amostragens de 10.000 e 100.000 apresentam valores com um erro muito reduzido, pois o erro do valor máximo em relação ao valor mínimo é 1,91% e 0,67% respectivamente.

Atendendo a estas conclusões é possível ainda retirar uma outra conclusão, que a fórmula do erro apresentada para este método tem em conta uma precisão muito superior à que é tida como suficiente nos problemas correntes da engenharia civil, sendo portanto assim apenas um valor que permite determinar uma aproximação por excesso do número de amostras necessárias.

Resolução pelo método do Hipercubo Latino.

Tal como referido na secção anterior o método do Hipercubo Latino é um caso particular do método de Monte Carlo. Assim, a formulação a utilizar na resolução do problema pelo método do Hipercubo Latino é semelhante à utilizada pelo método de Monte Carlo, tanto nas variáveis consideradas relevantes, como nas equações utilizadas. Apenas o processo de obtenção dos valores das variáveis empregues na execução das simulações será diferente.

De forma a possibilitar uma comparação entre os dois métodos a resolução deste método também será dividida em duas hipóteses. A primeira mais simples de acordo com a equação 3.61 e a segunda de acordo com as equações 3.69 e 3.70. Em ambos os métodos será calculada a margem de segurança, Z , pelas expressões 3.64, 3.65 e 3.66, de forma a permitir o cálculo do índice de fiabilidade, pela expressão 3.58 e a probabilidade de rotura, pela expressão 3.68. Quanto ao momento actuante, este foi descrito estatisticamente tendo em conta o coeficiente de variação do momento resistente para 100.000 amostras através método de Monte Carlo, encontrando-se estes dados sumarizados no quadro 3.7, tendo sido estes os que foram utilizados para a execução deste método.

Assim sendo, visando o acima descrito e o presente na secção 3.4.2.2, para a primeira hipótese e atendendo a que o método do Hipercubo Latino é um método mais eficiente, as simulações que foram levadas a cabo foram a divisão da função densidade de probabilidade (FDP) de cada variável interveniente no problema em respectivamente 100, 1.000 e 10.000 áreas de igual probabilidade. Desta forma o resultado do momento resistente calculado pela primeira hipótese encontra-se resumido no seguinte quadro:

Quadro 3.14: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1.

M_R \ N	100	1.000	10.000
Valor médio (μ_{MR} , kNm)	940,4339	940,445	940,4479
Desvio padrão (σ_{MR} , kNm)	55,1883	55,4682	55,4791

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov.

E respectivos histogramas:

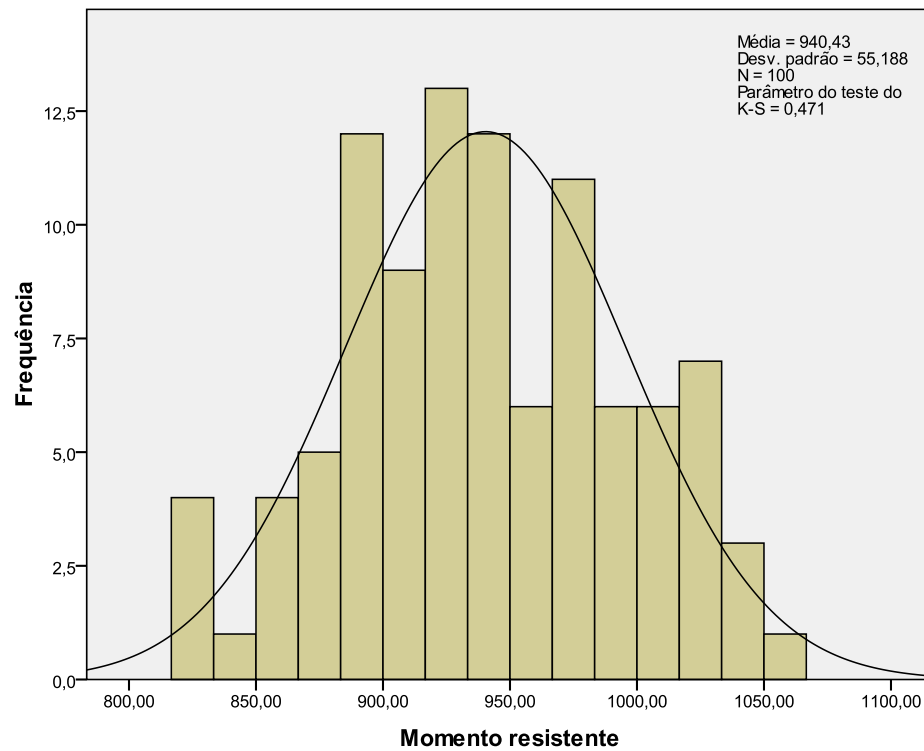


Fig. 3.19 – Histograma do momento resistente para simulação das 100 amostras, hipótese 1.

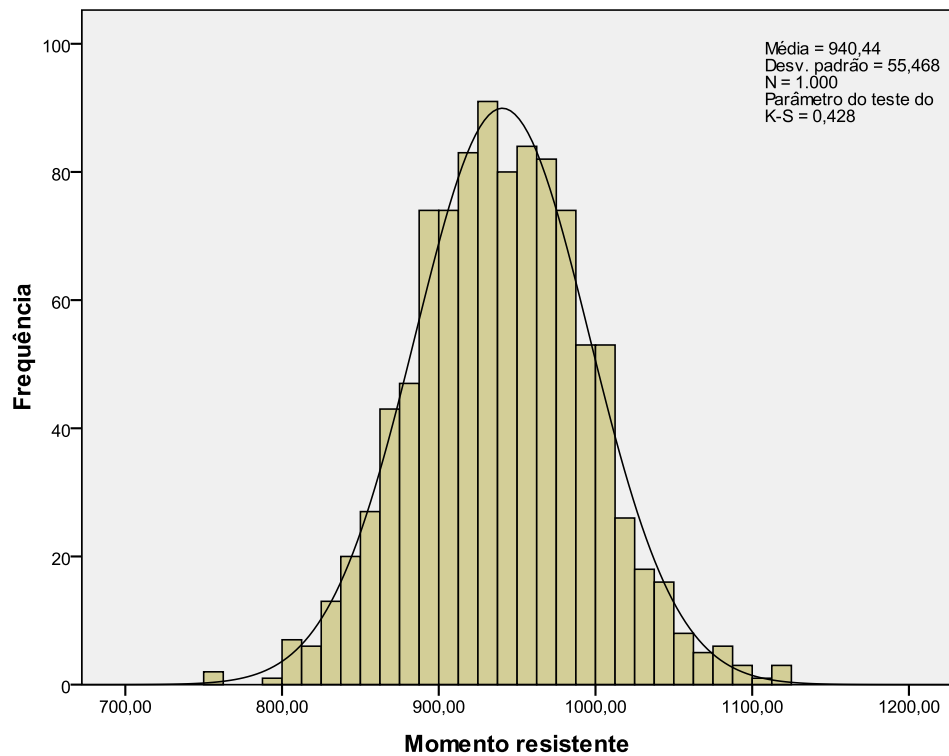


Fig. 3.20 – Histograma do momento resistente para simulação das 1.000 amostras, hipótese 1.

Tendo-se obtido estes valores, da mesma forma que no método anterior, foi calculada a margem de segurança a partir dos valores presentes no seguinte quadro:

Quadro 3.15: Resultados da margem de segurança pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1.

Z \ N	100	1.000	10.000
Valor médio (μ_z)	229,2230	229,2341	229,2370
Desvio padrão (σ_z)	69,5297	69,7521	69,7607
Índice de fiabilidade (β)	3,30	3,29	3,29
Probabilidade de rotura (P_f)	4,89E-04	5,07E-04	5,08E-04

Analisando assim o quadro acima, tal como na resolução pelo método de Monte Carlo os valores do índice de fiabilidade encontram-se no limiar dos valores definidos para a classe de fiabilidade RC-1 o que, tendo em conta que os valores presentes no EC-0 (2002) foram propostos para o projecto de pontes, sendo assim conservativos, pode-se concluir que a viga está segura para a classe de fiabilidade RC-1 não estando, no entanto, segura para a classe de fiabilidade RC-2.

Realizando agora a segunda hipótese de resolução pelo método do Hipercubo Latino mantendo a divisão da função densidade de probabilidade (FDP) das variáveis intervenientes em 100, 1.000 e 10.000 extractos respectivamente, assim os valores para a posição do eixo neutro da secção e para o momento resistente vêm os seguintes:

Quadro 3.16: Resumo dos resultados da posição do eixo neutro.

x \ N	100	1.000	10.000
Valor médio (μ_x, m)	0,111	0,111	0,1112
Desvio padrão (σ_x, m)	0,0105	0,0101	0,0111

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov.

Quadro 3.17: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 2.

M_R \ N	100	1000	10000
Valor médio (μ_{MR} , kNm)	985,6269	985,2104	985,2379
Desvio padrão (σ_{MR} , kNm)	66,1762	62,104	56,9146

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov.

Analisando com atenção o quadro 3.17, verifica-se que o desvio padrão do momento resistente apresenta valores superiores aos esperados para a simulações de 100 e 1.000 extractos o que tem como consequência a obtenção de valores do índice de fiabilidade muito inferiores aos que seriam de supor (como presente no quadro 3.18).

Quadro 3.18: Resultados do índice de fiabilidade pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 2.

Z \ N	100	1.000	10.000
Índice de fiabilidade (β)	3,49	3,65	3,86

Desta forma foi necessário realizar um procedimento que reduzisse, apenas a variância desta variável pois o seu valor médio encontra-se nos valores esperados. Assim procedeu-se da seguinte forma, manteve-se a divisão da função densidade de probabilidade (FDP) em 100, 1.000 e 10.000 intervalos mas foram retirados alguns dos intervalos extremos para que a variância reduzisse. Foram realizadas várias tentativas, reduzindo a amostragem em 2, 4 e 6%, tendo-se chegado à conclusão que a redução que melhor se adequava ao caso em questão era a redução da amostragem em 4%, ou seja, suprimiu-se 2% dos intervalos iniciais e finais da amostragem. O que se reflecte nos primeiros e últimos 2, 20 e 200 intervalos respectivamente para as amostragens de 100, 1.000 e 10.000. Por conseguinte a hipótese 2 em questão passou a ser resolvida, realizando respectivamente 96, 960 e 9600 amostragens, encontrando-se assim os novos valores para o momento resistente sumarizados no quadro 3.19 e seus histogramas nas figura 3.21 3.22.

Quadro 3.19: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 2, com redução da amostragem em 4%.

M_R \ N	96	960	9.600
Valor médio (μ_{MR} , kNm)	985,7806	985,4812	985,6164
Desvio padrão (σ_{MR} , kNm)	57,5299	55,9841	56,0163

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov.

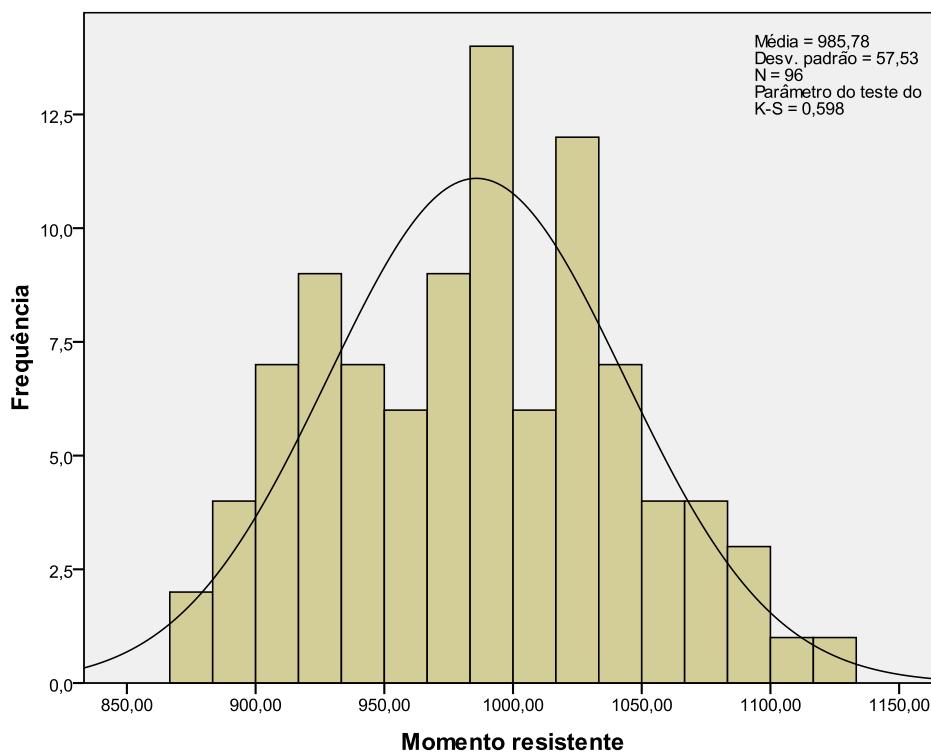


Fig. 3.21 – Histograma do momento resistente para simulação das 96 amostras, hipótese 2.

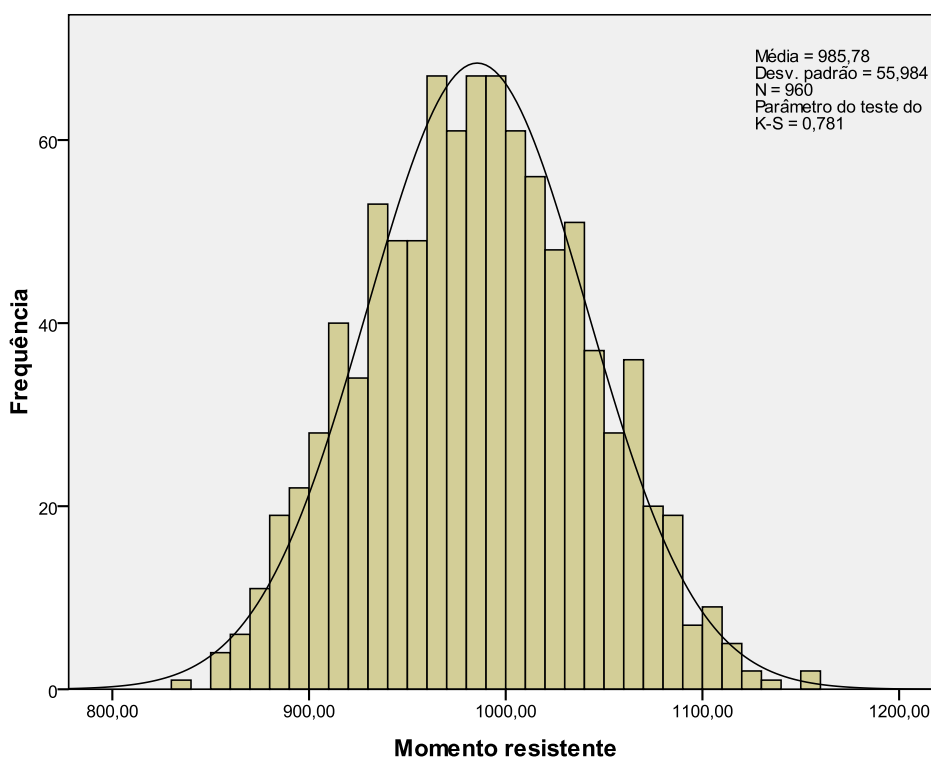


Fig. 3.22 – Histograma do momento resistente para simulação das 960 amostras, hipótese 2.

Da mesma forma que nas hipóteses anteriores proceder-se-á agora ao cálculo da margem de segurança e respectivos índices de fiabilidade e das probabilidades de rotura para estes valores do momento resistente. Encontrando-se estes valores presentes no quadro que se segue:

Quadro 3.20: Resultados da margem de segurança pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1, com redução da amostragem em 4%.

Z \ N	96	960	9.600
Valor médio (μ_z)	274,5697	274,2703	274,4055
Desvio padrão (σ_z)	71,4025	70,1630	70,1887
Índice de fiabilidade (β)	3,85	3,91	3,91
Probabilidade de rotura (P_f)	6,02E-05	4,63E-05	4,62E-05

Desta forma é possível afirmar que a viga em questão cumpre os requisitos de segurança das classes de fiabilidade RC-1 e RC-2 estando desta forma à luz da hipótese em questão segura. Uma nota a ter em conta nesta redução dos intervalos é que é necessário ressaltar qualquer anomalia severa que exista na viga em questão.

Visto que na resolução da segunda hipótese do problema foi necessário suprimir parte dos intervalos iniciais e finais da amostragem das variáveis achou-se oportuno verificar se na resolução do problema pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1 se o mesmo seria necessário e vantajoso.

Assim os valores para o momento resistente atendo a esta redução dos intervalos utilizados na resolução do problema encontram-se presentes no quadro 3.21.

Quadro 3.21: Resultados do momento resistente pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1, com redução da amostragem em 4%.

M_R \ N	96	960	9.600
Valor médio (μ_{MR} , kNm)	940,4709	940,2094	940,4535
Desvio padrão (σ_{MR} , kNm)	50,1241	52,3365	49,4704

Nota: A normalidade dos resultados foi verificada realizando o teste de normalidade e de Kolmogorov-Smirnov

Tendo neste caso, como seria de esperar, ocorrido também uma redução da variância do momento resistente. Só que neste caso, como a variância inicial estava nos valores esperados ao realizar esta operação de redução da variância obtêm-se valores do índice de fiabilidade muito superiores aos esperados o que não é de todo aconselhável (ver quadro 3.22).

Quadro 3.22: Resultados do índice de fiabilidade pelo método do Hipercubo Latino, hipótese 1, com redução da amostragem em 4%.

Z	N	96	960	9.600
Índice de fiabilidade (β)		3,50	3,40	3,52

Assim contrariamente à hipótese 2 na hipótese 1 não será realizada nenhum procedimento de redução da variância.

Analisando agora a resolução das duas hipóteses pelo método do Hipercubo Latino, com base nos procedimentos realizados, para a primeira hipótese o número de amostras necessárias para a obtenção de um valor com um erro aceitável é 100. Contudo, não é de se excluir a possibilidade da execução de uma amostragem de 1.000 nos casos onde é necessária uma aproximação com um grau de certeza superior. E para a segunda hipótese o número de amostras tidas como necessárias é 100 com uma redução dos intervalos extremos em 2% respectivamente sendo assim na realidade realizadas apenas 96 amostras, mas tal como na primeira hipótese a realização das 1.000 amostras (960 com a redução dos extremos) não é de excluir se se quiser uma melhor aproximação dos resultados.

Conclusões

Para realizar uma comparação entre os dois métodos estudados, ou seja entre o método de Monte Carlo e o método do Hipercubo Latino, realizou-se 50 repetições de cada uma das hipóteses dos métodos, nas figuras 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26, encontram-se ilustradas as dispersões dos índices de fiabilidade para cada uma das hipóteses e dos métodos.

Analisando estas, é possível afirmar, com base no exemplo em questão e nas simulações realizadas, que tal como seria de esperar o método do Hipercubo Latino é mais eficiente que o método de Monte Carlo sendo a amostragem necessária neste método de apenas 1% a 10% do requerido pelo método de Monte Carlo.

Assim, para o método do Hipercubo Latino, conclui-se que se a verificação não exigir uma precisão especial, 100 amostras são tidas como suficientes para a obtenção de bons resultados. Se pelo contrário, for requerida uma melhor precisão dos resultados é aconselhada a utilização de 1.000 amostras na aplicação do método.

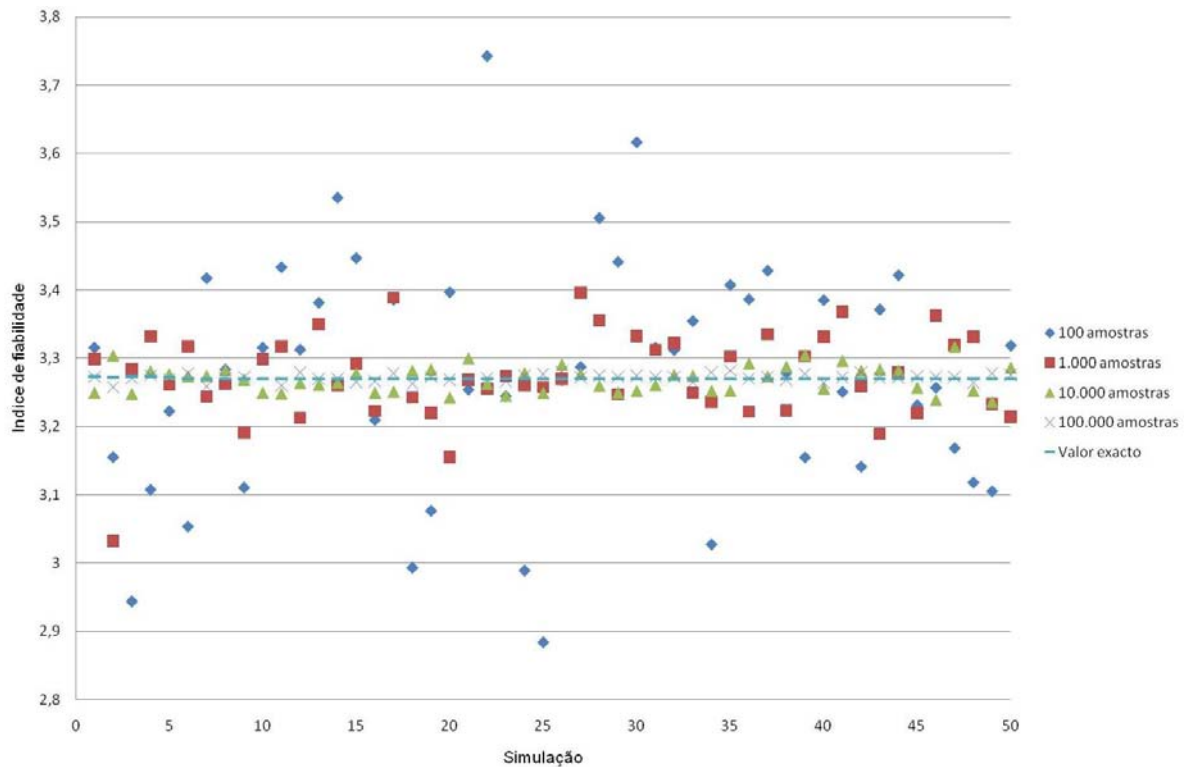


Fig. 3.23 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 1 do método de Monte Carlo.

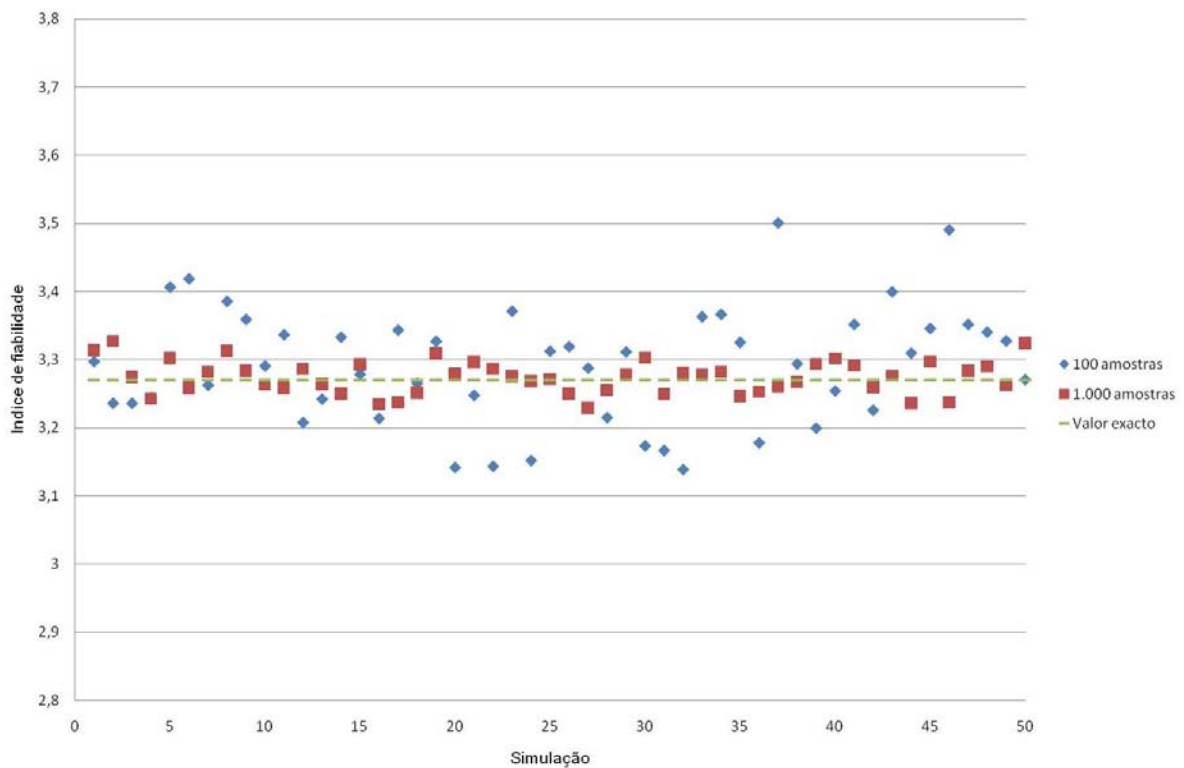


Fig. 3.24 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 1 do método do Hipercubo Latino.

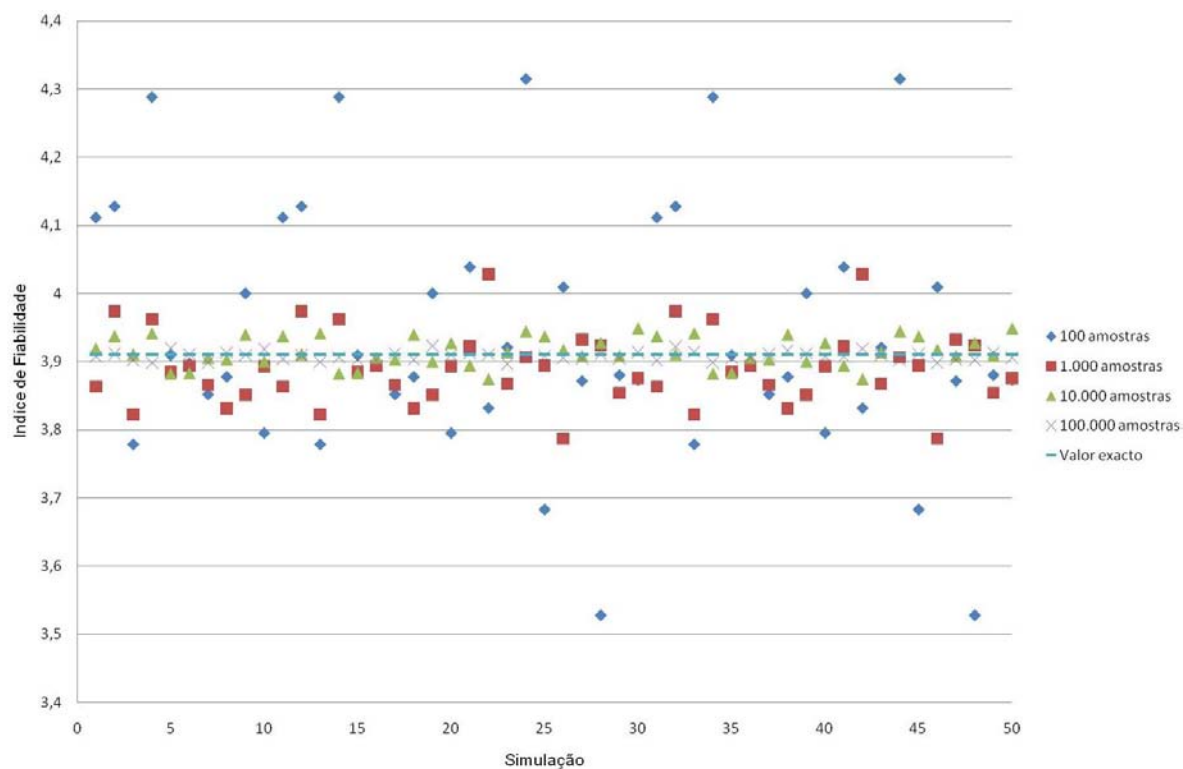


Fig. 3.25 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 2 do método de Monte Carlo.

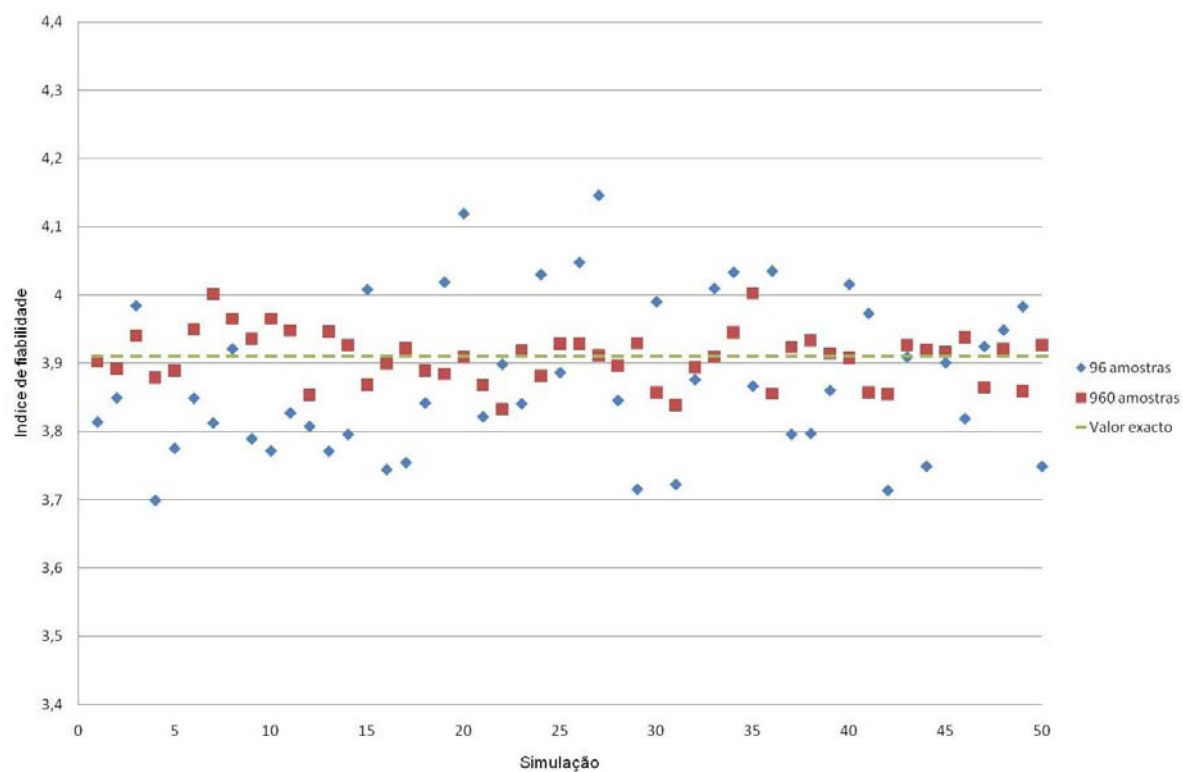


Fig. 3.26 – Diagrama da dispersão dos índices de fiabilidade para a hipótese 2 do método do Hipercubo Latino.

4

**EXEMPLO DE APLICAÇÃO –
AVALIAÇÃO DE UMA PASSAGEM
SUPERIOR****4.1. INTRODUÇÃO**

A aplicação das metodologias probabilísticas desenvolvida à avaliação da segurança de uma estrutura é o tema deste capítulo. Pretende-se neste exemplo prático aferir o grau de segurança de uma estrutura através apenas da aplicação do método do Hipercubo Latino, pois como se pode constatar no capítulo anterior este método apresenta o mesmo grau de confiança nos resultados mas necessita de um menor esforço computacional, como tal, é um método mais eficiente quando comparado com o método de Monte Carlo puro.

Desta forma, será realizada a avaliação da segurança, aos esforços de flexão, de uma passagem superior sobre uma linha ferroviária. Esta avaliação será realizada aplicando a metodologia dos cinco níveis apresentada na secção 2.3. Mas como neste trabalho é dado especial atenção aos métodos probabilísticos, será apenas verificado o primeiro nível, verificação determinística de acordo com os regulamentos em vigor, e o quinto e último nível de verificação, o mais complexo e sofisticado, que emprega métodos probabilísticos na avaliação da segurança.

Assim, a avaliação é levada a cabo em duas fases, uma primeira fase onde se aplica as metodologias propostas à estrutura intacta. E uma segunda fase onde se aplica as mesmas metodologias, mas neste caso a ponte em questão se encontra severamente danificada de tal forma que não cumpre os requisitos de segurança presentes nos regulamentos (EC-1, 2002; EC-1b, 2002; EC-2, 2004; EC-2b, 2003). Em ambas as fases serão avaliadas quanto ao momento positivo máximo, a secção de meio o vão do tramo central, e quanto ao momento negativo máximo a secção sobre o pilar P1, sendo a ponte simétrica é igual à do pilar P2. Se no decorrer da verificação numa primeira instância a o índice de fiabilidade calculado for inferior aos valores de referência, será realizada uma redistribuição dos esforços de modo a tirar partido da hiperestaticidade da estrutura. A ponte analisada neste exemplo é uma passagem superior de três tramos com um tabuleiro de betão armado pré-esforçado.

4.2. DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA

A passagem superior em questão consiste numa estrutura em pórtico com uma extensão total de 57.00m repartidos em dois vãos extremos com 17.50m, e um vão central com 22.00m (fig. 4.1). A estrutura consiste num tabuleiro, de 7.00m, em laje de betão armado pré-esforçado com três vãos,

monoliticamente ligados aos pilares centrais e apoiados nos encontros através de aparelhos de apoio de neoprene cintado.

A laje tem uma espessura constante de 0.85m e prolonga-se lateralmente em consola com 1.00m de vão sendo a espessura variável entre 0.20m e 0.25m (fig. 4.2).

Nas extremidades do tabuleiro existem carlingas que rematam a laje e que transmitem os esforços provenientes do tabuleiro. Estas carlingas têm altura variável e espessura constante de 0.80m.

Os pilares intermédios tem secção rectangular com 2.40m de largura e 0.60m de espessura. Cada pilar é fundado indirectamente através de seis estacas moldadas com 0.80 de diâmetro, encabeçadas por um único maciço de fundação com as seguintes dimensões: $6.00 \times 3.70 \times 1.10 \text{ m}^3$, sendo monoliticamente ligados ao tabuleiro no topo.

Os encontros são do tipo perdido, constituídos por dois fustes verticais de inércia variável, encabeçados pela mesa de apoio que recebe os esforços do tabuleiro, transmitidos pelos aparelhos de apoio em neoprene.

Cada fuste de encontro é fundado por um par de estacas moldadas $\Phi 0.80\text{m}$ encabeçadas por um maciço de fundação rectangular com $3.70 \times 1.20 \times 1.10 \text{ m}^3$. Os dois maciços de cada encontro são travados por uma viga transversal com $2.60 \times 0.90 \times 0.80 \text{ m}^3$.

Esta ponte foi projectada, tem em conta a regulamentação em vigor em Portugal para a verificação de segurança, nomeadamente o REBAP (1985) e o RSA (1983) considerando-se um veículo tipo da classe I.

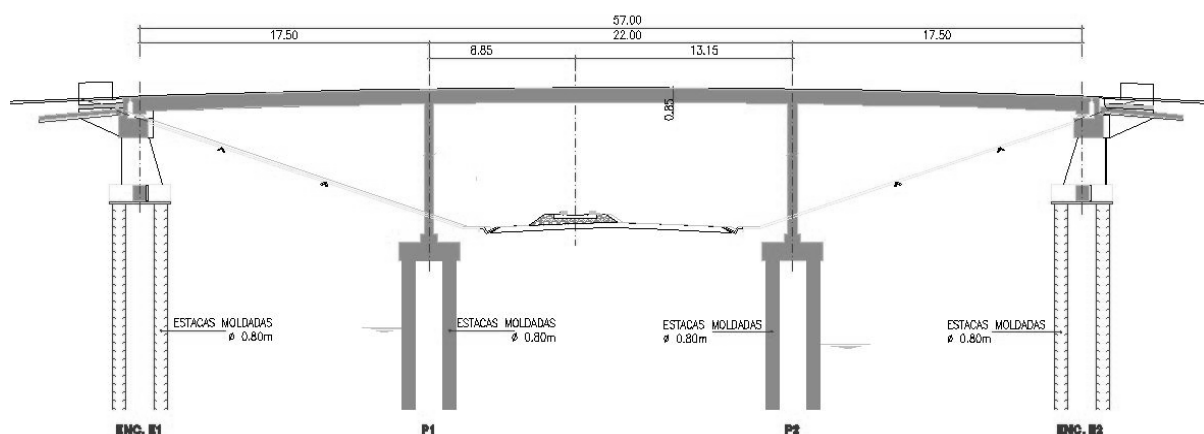


Fig. 4.1 – Corte longitudinal da passagem superior – desenho do projecto.

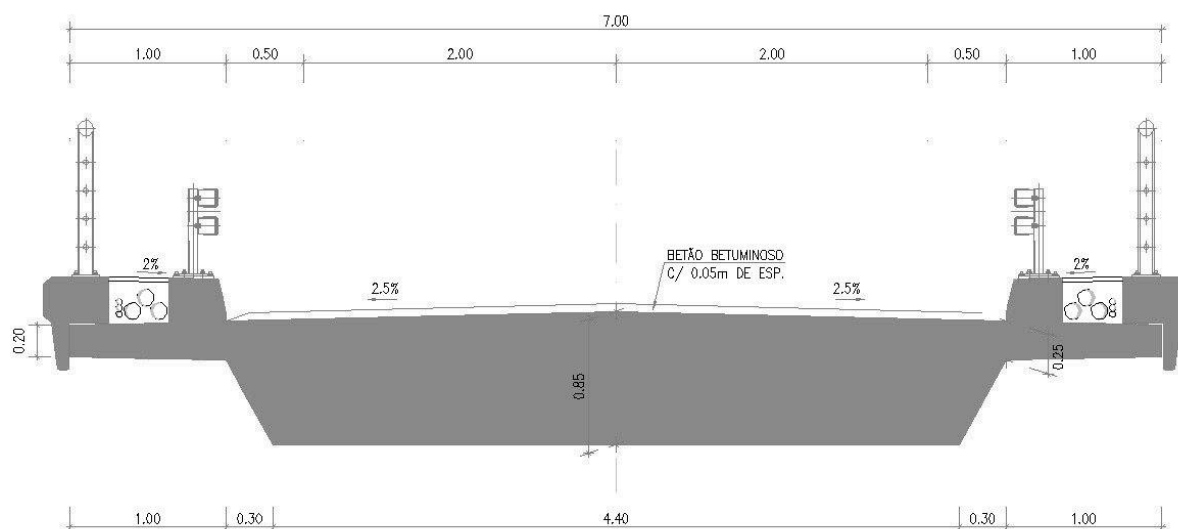


Fig. 4.2 – Corte transversal da passagem superior – desenho do projecto.

4.3. DADOS GEOMÉTRICOS E MATERIAIS

A passagem superior como referida e se pode constatar pela figura 4.1 é composta por três vãos, de 17.50m, 22.00m e 17.50m respectivamente. O tabuleiro é composto por uma laje de betão armado pré-esforçado com uma largura de 7m (fig. 4.2). A solução de pré-esforço preconizada para esta secção é de 7 cabos de 19 cordões de 0.5", que para simplificação do cálculo da secção foram reduzidos a um cabo resultante com a área de armadura total, ou seja, uma área de armadura de 133cm^2 , com o traçado como se pode observar na figura 4.3.

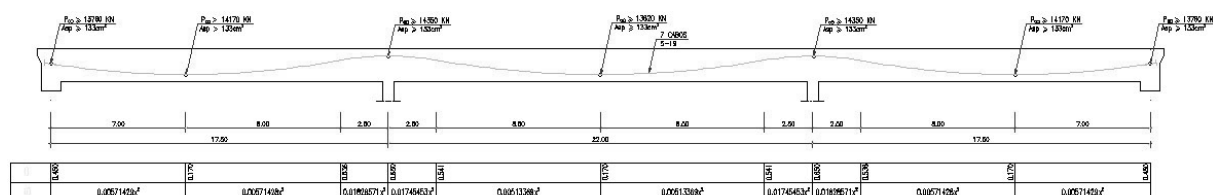


Fig. 4.3 – Traçado do cabo resultante de pré-esforço com respectivas posições altimétricas e equações – desenho do projecto.

A solução de armadura implementada nas secções em análise, ou seja, na secção central do vão intermédia e na secção sobre o pilar P1 encontram-se descritas nas seguintes figuras:

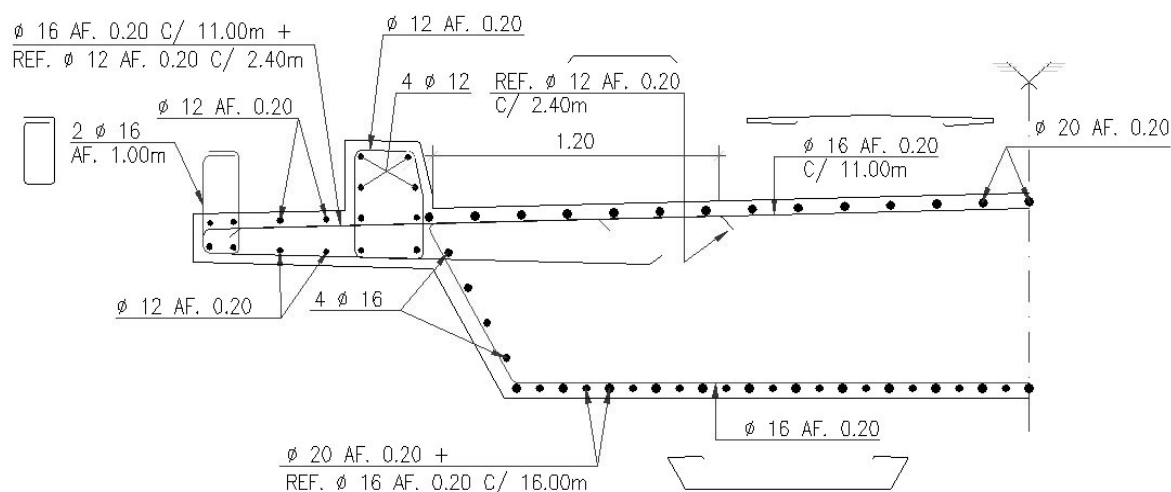


Fig. 4.4 – Solução da armadura do tabuleiro, secção central do vão intermédia – desenho do projecto.

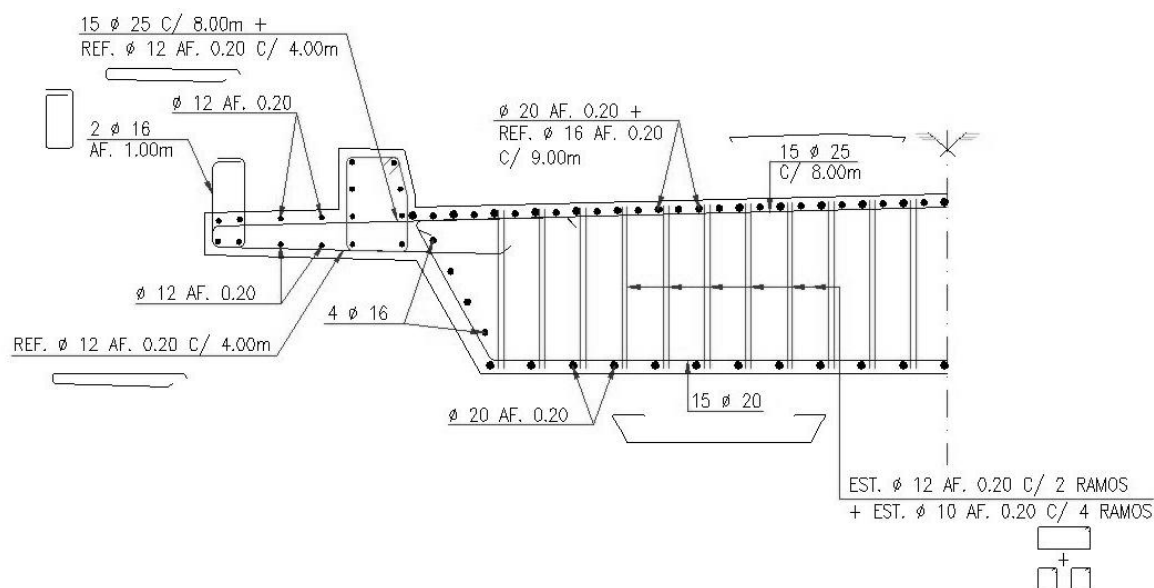


Fig. 4.5 – Solução da armadura do tabuleiro, secção sobre o pilar P1 – desenho do projecto.

De acordo com as especificações do projecto, os materiais utilizados na super-estrutura foram o betão classe C25/30, o aço S500 para as armaduras ordinárias e o aço S1680/1860 para as armaduras de pré-esforço. As propriedades mecânicas dos materiais encontram-se sumarizadas nos quadros 4.3 e 4.4, não apenas pelo seu valor característico ou médio mas também através dos seus parâmetros estatísticos, mais concretamente através dos coeficientes de variação das ditas variáveis. O coeficiente de variação é determinado pelo quociente entre o desvio padrão e o valor médio de cada variável e permite ter uma noção da sua variabilidade, tendo sido estes parâmetros estatísticos sido definidos com base nos trabalhos de Wiśniewski (2007) e Henriques (1998).

4.4. ACÇÕES

As acções consideradas na análise foram as seguintes (ver figuras 4.7 e 4.8):

- G_S – peso próprio da estrutura;
- G_A – acções permanentes adicionais, referentes ao peso próprio do pavimento betuminoso, lancil, guarda-corpos, passeios e viga de bordadura;
- Q – sobrecarga de utilização rodoviária “LM1”, de acordo com o EC-1b (2002);

Quanto à sobrecarga de utilização, apesar de no dimensionamento da ponte ter sido utilizado RSA (1983), será utilizado o modelo previsto no EC-1b (2002). Acontece desta forma porque como será analisado o cenário da ponte se encontrar deteriorada, ou seja, assumindo que a construção desta é realizada na actualidade, a sua análise de segurança realizar-se-á quando o regulamento em vigor já não for o RSA (1983) mas sim o EC-1b (2002). Importa também salientar que o EC-1b (2002) é um regulamento mais severo, logo se a ponte estiver em segurança para as sobrecargas descritas neste, certamente será classificada como segura de acordo com o RSA (1983).

É de todo pertinente apresentar agora uma breve apresentação ao modelo de sobrecarga descrito no EC-1b (2002), que será utilizado na verificação.

O principal modelo do EC-1b (2002), é um modelo de carga para auto-estrada, denominado “LM1”, que se encontra ilustrado na figura 4.6. Este modelo pode ser aplicado tanto em verificações locais ou globais de pontes. Os valores característicos da intensidade da acção para este modelo, definidos como o percentil de 95% da distribuição máxima para um período de retorno de 50 anos, encontram-se presentes no quadro 4.1.

A carga deverá ser colocada na posição mais desfavorável para o elemento estrutural e o efeito local em questão. Contudo, primeiro é necessário identificar as faixas teóricas. Geralmente, a faixa de rodagem é dividida numa quantidade inteira de faixas teóricas com 3 metros de largura. Entre estas a faixa que causa o efeito mais desfavorável é determinada a Faixa 1, com o segundo efeito mais desfavorável Faixa 2, etc. Estas faixas não têm necessariamente de corresponder às marcações correspondentes às faixas rodoviárias da ponte.

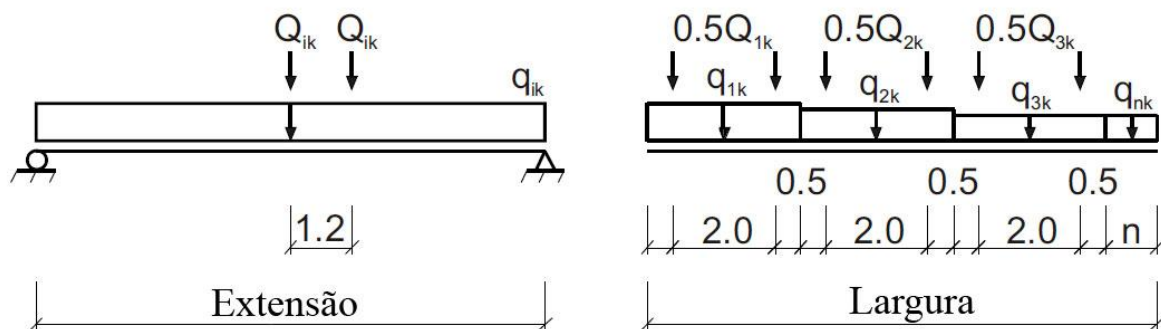


Fig. 4.6 – Descrição do principal modelo de acções rodoviárias do EC1, “LM1” (adaptado de EC-1b, 2002).

Quadro 4.1: Intensidade das cargas no modelo de acções rodoviárias do EC1 (EC-1b, 2002).

Faixa	Cargas concentradas, Q_{ik}	Cargas distribuídas, q_{ik}
Faixa 1	300 kN	9 kN/m ²
Faixa 2	200 kN	2.5 kN/m ²
Faixa 2	100 kN	2.5 kN/m ²
Outras faixas, n	0	2.5 kN/m ²
Restante área	0	2.5 kN/m ²

Atendendo ao acima exposto, na análise, as cargas permanentes foram consideradas uniformemente distribuídas ao longo de todo o comprimento da ponte.

O posicionamento e a distribuição das sobrecargas de utilização, Q , foram determinados de acordo com a linha de influência do momento flector máximo tanto para a secção localizada a meio do vão central em análise, como para a secção sobre o pilar P1.

Assim as duas combinações das acções utilizadas na análise são as que se encontram representadas nas seguintes figuras:

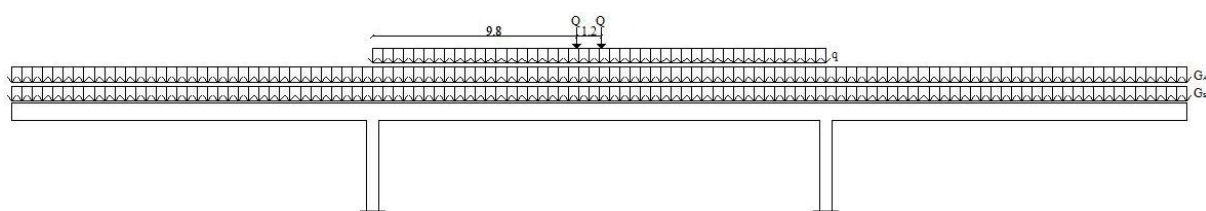


Fig. 4.7 – Combinação das cargas de forma a obter o momento máximo na secção de central do vão intermédio – combinação 1.

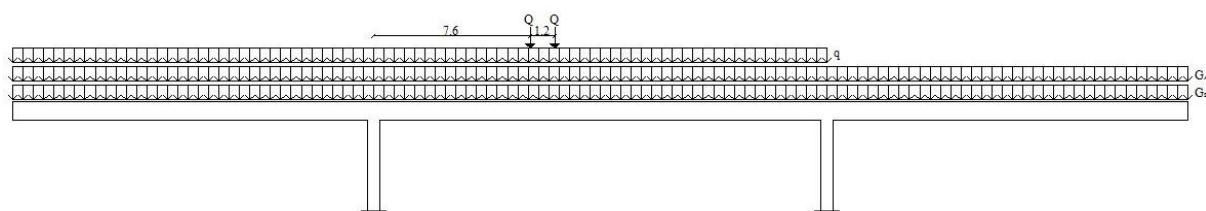


Fig. 4.8 – Combinação das cargas de forma a obter o momento máximo na secção sobre o pilar P1 – combinação 2.

E a quantificação das acções descritas, e o seu coeficiente de variação que descreve as incertezas inerentes a estas, encontra-se sumariada no quadro que se segue:

Quadro 4.2: Quantificação das acções actuantes.

Carga	Valor médio	Coeficiente de variação	Função de distribuição
Peso próprio da estrutura	109.6 kN/m	8.00%	Normal
Acções permanentes adicionais	Betuminoso - 9.60 kN/m	8.00%	Normal
	Lancil - 2.40 kN/m		
	Guarda-corpos - 2.00 kN/m		
	Passeio - 6.60 kN/m		
	Viga de bordadura - 7.52 kN/m		
TOTAL = 28.12 kN/m			
Sobrecarga de utilização rodoviária	$q = 9 \text{ kN/m}^2 \times 5 \text{ m}^{(1)} = 45 \text{ kN/m} \times 0.80^{(2)} = 36 \text{ kN/m}$ $Q = 300 \text{ kN} \times 0.80^{(2)} = 240 \text{ kN}$	15.00%	Normal

Nota: (1) A largura referente à Faixa 1, por simplificação, em vez de ser os 3m definidos no regulamento, visto que a largura das faixas de rodagem apenas tem 5m, é igual a estes 5m;

(2) Coeficiente de redução, previsto no EC-1b (2002), para estradas com tráfego normal;

4.5. ANÁLISE DE FIABILIDADE

Para a análise de fiabilidade, tal como foi sendo referido nas secções anteriores, será avaliada a segurança da estrutura aos esforços de flexão, na secção central do vão intermédio e na secção sobre o pilar P1.

Esta análise da resistência da estrutura ao momento flector será realizada recorrendo ao programa de cálculo automático “Secção” (Henriques, 2002). O programa permite determinar a resposta da secção desde o estado de repouso até ao colapso, quando esta está sujeita a esforços de flexão (esforço axial, N , e momento flector, M), tendo em conta o comportamento não linear do aço e do betão.

O programa assume que as deformações se distribuem linearmente dentro da secção transversal proposta. A secção transversal é modelada por uma série de faixas horizontais com formas que podem ser rectangulares ou trapezoidais. Para uma dada extensão, a correspondente tensão é calculada usando modelos dos materiais constitutivos apropriados. O momento correspondente a uma dada curvatura é determinado pela integração dos esforços internos.

Os modelos do comportamento dos materiais considerados na análise foram adoptados do EC-2 (2004). As figuras 4.9 e 4.10 mostram os modelos constitutivos do betão, e do aço ordinário e/ou de pré-esforço respectivamente.

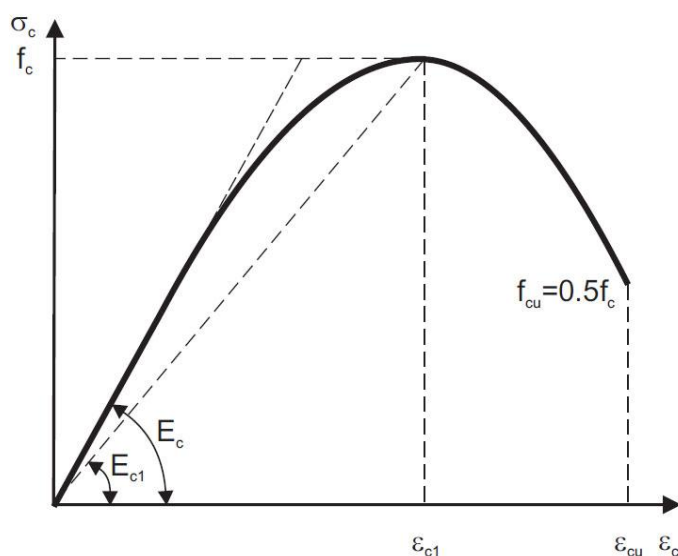


Fig. 4.9 – Diagrama tensão-extensão para o betão (Wiśniewski, 2007).

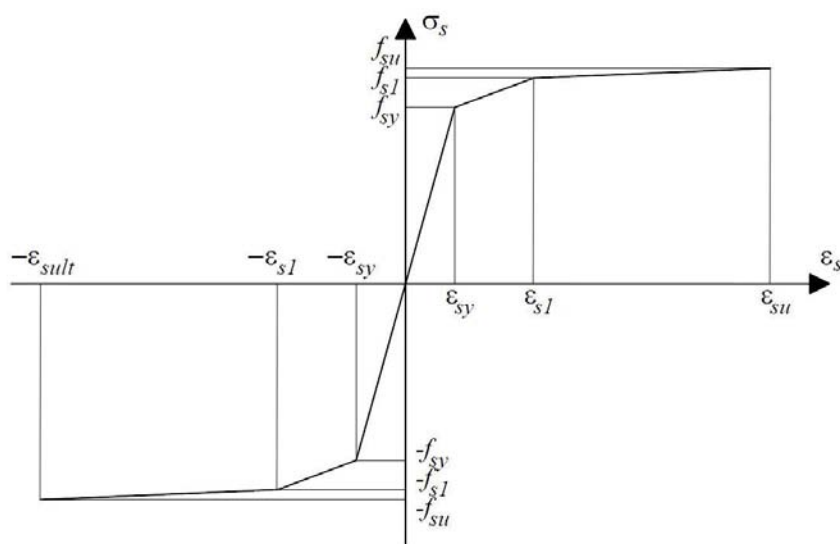


Fig. 4.10 – Diagrama tensão-extensão para o aço ordinário e/ou de pré-esforço (Henriques, 2002).

Os materiais e os parâmetros geométricos são considerados na análise como aleatórios. Assim a realização deste procedimento requer a definição de distribuições adequadas para as variáveis, para desta forma simular o melhor possível, o comportamento estrutural para todos os casos com possibilidade de ocorrência. Partindo destes pressupostos, definiram-se variáveis aleatórias que possibilitam traduzir de forma objectiva a incerteza do comportamento estrutural em função da variabilidade associada ao comportamento mecânico dos materiais e às imperfeições geométricas. Estas variáveis encontram-se sumarizadas nos quadros 4.3 e 4.4 e foram assumidas de acordo com os trabalhos de Wiśniewski (2007) e Henriques (1998).

Quadro 4.3: Variáveis consideradas na análise de fiabilidade, parte 1.

Variável aleatória	Descrição	Valor médio	Desvio padrão	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
Betão C25/30					
f_c	Tensão de rotura à compressão	37,8 MPa	2,91 MPa	8.00%	Normal
$f_{ct}^{(1)}$	Tensão de rotura à tracção	2.82 MPa	0.535 MPa	19.00%	Normal
$E_c^{(2)}$	Módulo de elasticidade	30.8 GPa	2.47 GPa	8.00%	Normal
ε_{c1}	Extensão correspondente a f_c	2.20‰	–	–	Constante
ε_{cr}	Extensão limite de fendilhação	0.15‰	–	–	Constante
ε_{cu}	Extensão de rotura à compressão	3.50‰	–	–	Constante
α	Tension-stiffening	0.60	–	–	Constante
Aço ordinário S500					
f_{sy}	Tensão de cedência	603 MPa	36.18 MPa	6.00%	Normal
f_{su}	Tensão de rotura	$1.15f_{sy}^{(3)}$	–	–	–
E_s	Módulo de elasticidade	205 GPa	10.05 GPa	5.00%	Normal
ε_{su}	Extensão de rotura	$7.5\%^{(3)}$	1.125%	15.00%	Normal
A_s	Área da armadura	nominal	–	2.00%	Normal
y_s	Posição da armadura referente à fibra inferior	nominal	–	2.00%	Normal

Nota:

(1) valor obtido de acordo com a expressão seguinte (Henriques, 1998):

$$f_{ctm} = 0.25 f_{cm}^{2/3} \text{ (MPa)} \quad (4.1)$$

(2) valor obtido de acordo com a expressão (Wiśniewski, 2007):

$$E_{cm} = 5015 f_{cm}^{1/2} \text{ (MPa)} \quad (4.2)$$

(3) Expressão retirada do anexo C do EC-2 (2004), para aços da classe C, aços de alta ductilidade.

Quadro 4.4: Variáveis consideradas na análise de fiabilidade, parte 2.

Variável aleatória	Descrição	Valor médio	Desvio padrão	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
Aço pré-esforço S1680/1860					
$f_{p0.1}$	Tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.1%	$0.90f_{pu}^{(1)}$	–	–	–
f_{pu}	Tensão de rotura	1934 MPa	42.55 MPa	2.00%	Normal
E_s	Módulo de elasticidade	199 GPa	4.18 GPa	2.00%	Normal
ε_{pu}	Extensão de rotura	3.50%	0.28%	8.00%	Normal
A_p	Área da armadura	nominal	–	2.00%	Normal
y_p	Posição da armadura referente à fibra inferior	nominal	–	2.00%	Normal
Pré-esforço					
P	Pré-esforço	14350 kN	861 kN	6.00%	Normal

Nota: (1) expressão retirada de Henriques (1998)

Apresentadas as variáveis e o programa que será utilizado para a realização do processo de avaliação da segurança da passagem superior será iniciado este processo. Esta avaliação, tal como acima referido, será levada a cabo de acordo com a metodologia dos cinco níveis. Contudo, como exposto na introdução deste capítulo, apenas o primeiro e último nível serão avaliados. As secções críticas escolhidas para análise nestes níveis serão a secção central do vão intermédio e a secção sobre o pilar P1. Resta ainda recordar que a estrutura será analisada segundo dois estados de conservação, o primeiro encontrando-se a estrutura da ponte em perfeito estado de conservação, intacta, e o segundo encontrando-se a estrutura da ponte deteriorada, simulando, por exemplo, uma situação onde ocorre uma perda total da armadura ordinária da camada inferior, A_{sl} , (ver figuras 4.13 e 4.14) e uma redução de sete para três no número de cabos de pré-esforço em funcionamento.

As cargas intervenientes nesta avaliação, encontram-se descritas na secção 4.4 e sumarizadas no quadro 4.2. Desta forma, os momentos actuantes para as secções críticas, para os dois casos de carga presentes nas figuras 4.7 e 4.8 que permitem obter os momentos máximos para cada secção, encontram-se presentes no quadro 4.5.

Quadro 4.5: Momentos actuantes nas secções críticas.

Variável aleatória	Descrição	Secção pilar P1	Secção meio vão	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
M_{GS}	Peso próprio da estrutura	4342.6 kN	2288.2 kN	8.00%	Normal
M_{GA}	Acções permanentes adicionais	1114.2 kN	587.1 kN	10.00%	Normal
M_{Q1}	Sobrecarga rodoviária – comb.1	1833.7 kN	2867.7 kN	15.00%	Normal
M_{Q2}	Sobrecarga rodoviária – comb.2	2535 kN	2154.3 kN	15.00%	Normal

1º nível de avaliação de segurança

De acordo com a metodologia de avaliação da segurança de estruturas, apresentada neste trabalho, num primeiro nível a segurança da passagem superior é verificada usando os modelos de resistência e de carga definidos nos regulamentos EC-1b (2002), EC-2 (2004) e EC-2b (2003). São utilizados modelos de cálculo simplificados e a segurança é verificada empregando o método dos coeficientes parciais de segurança definido no EC-0 (2002), EC-2 (2004) e EC-2b (2003).

A verificação aos momentos positivos foi efectuada na secção de meio vão do tramo central de 22.0m com a combinação de acções 1, descrita na figura 4.7, pois esta combinação é a que provoca o momento flector máximo na secção em análise. Foi também efectuada a verificação aos momentos negativos na secção sobre o pilar P1 com a combinação de acções 2, descrita na figura 4.8, que tal como a combinação anterior, provoca o momento flector máximo na secção em análise. Tendo sido estas verificações efectuadas para a ponte sem anomalias e com anomalias como acima exposto.

No caso da verificação de segurança em flexão, a equação do método dos coeficientes parciais de segurança toma a seguinte forma:

$$\frac{M_R}{\gamma_R} \geq \gamma_{GS} M_{GS} + \gamma_{GA} M_{GA} + \gamma_Q M_Q \quad (4.3)$$

Onde M_R é o valor da resistência da secção aos esforços de flexão, M_{GS} é o valor do momento flector na secção em análise devido à acção do peso próprio da estrutura, M_{GA} é o valor do momento flector na secção em análise devido às restantes acções permanentes, M_Q é o valor do momento flector na secção em análise devido à sobrecarga de utilização rodoviária. Os coeficientes γ_R , γ_{GS} , γ_{GA} e γ_Q , são os coeficientes parciais de segurança para a resistência, peso próprio da estrutura, acções permanentes adicionais e para as sobrecargas de utilização para o tráfego rodoviário respectivamente.

Assim, os valores dos momentos actuantes são os presentes no quadro 4.5, onde se assume para esta análise estes iguais ao seu valor médio.

Para o cálculo do valor da resistência da secção aos esforços de flexão, a geometria da secção transversal presente na figura 4.2, foi simplificada de modo a facilitar os cálculos. Na secção simplificada foi retirado o pendente de 2.5% referente à inclinação das faixas de rodagem e foi substituído por uma secção rectangular com área equivalente como se ilustra na figura seguinte:

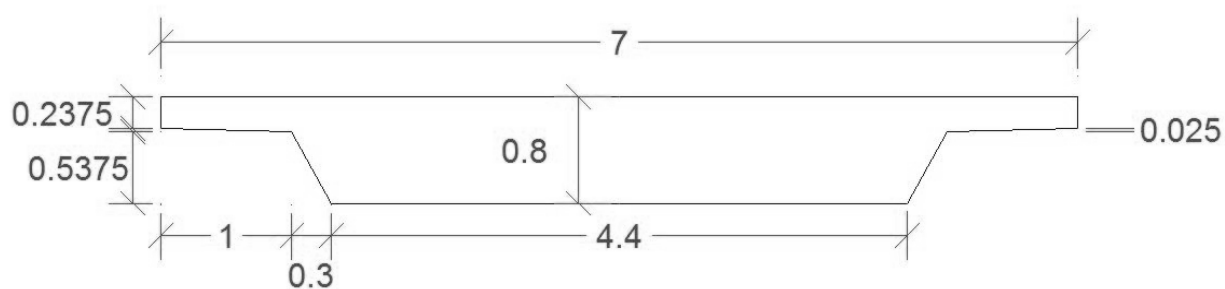


Fig. 4.11 – Corte transversal simplificado da passagem superior – desenho do projecto.

Esta secção, para introdução no programa “Secção”, foi discretizada como ilustrado na figura que se segue:



Fig. 4.12 – Discretização do corte transversal simplificado da passagem superior para introdução no programa “Secção”.

Devido ao programa “Secção” apenas permitir seis níveis de armadura foi também realizada uma simplificação ao nível das armaduras, passando as armaduras para efeitos de cálculo a estar disposta da seguinte forma, na secção central do vão intermédio:

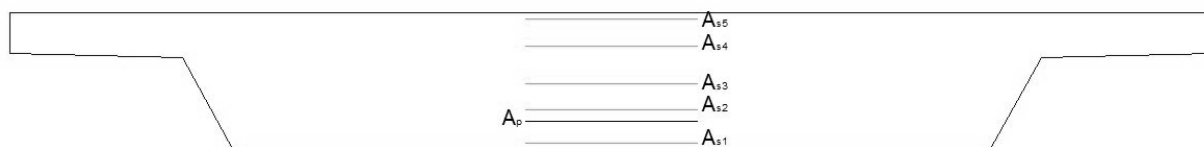


Fig. 4.13 – Disposição simplificada das armaduras da secção central do vão intermédio – desenho do projecto.

e na secção sobre o pilar P1:

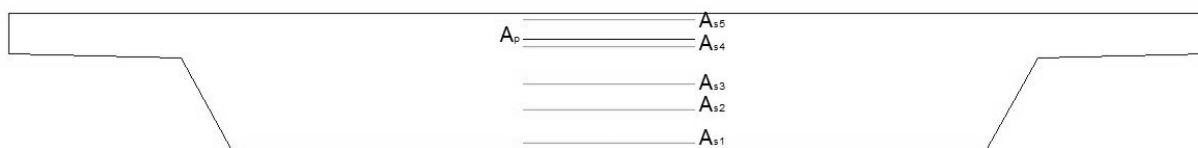


Fig. 4.14– Disposição simplificada das armaduras da secção sobre o pilar P1 – desenho do projecto.

Encontrando-se no quadro 4.6 a descrição da área nominal e posicionamento das armaduras acima ilustradas, quer para a secção central do vão intermédio, como para a secção sobre o pilar P1, para o caso da ponte sem anomalias.

Quadro 4.6: Descrição das armaduras, para a secção intacta.

Secção central do vão intermédio			Secção sobre o pilar P1	
Variável	Área nominal	Posição da armadura ⁽¹⁾	Área nominal	Posição da armadura ⁽¹⁾
Armadura ordinária, S500				
A_{s1}	116.49 cm ²	0.040 m	72.26 cm ²	0.040 m
A_{s2}	6.03 cm ²	0.239 m	6.03 cm ²	0.239 m
A_{s3}	6.03 cm ²	0.385 m	6.03 cm ²	0.385 m
A_{s4}	17.59 cm ²	0.603 m	17.59 cm ²	0.603 m
A_{s5}	98.40 cm ²	0.760 m	150.67 cm ²	0.760 m
Armadura de pré-esforço, S1680/1860				
A_p	133 cm ²	0.170 m	133 cm ²	0.650 m
Nota: (1) posicionamento da armadura relativamente à fibra inferior da secção.				

E encontrando-se no quadro 4.7 a descrição das armaduras para a hipótese da ponte deteriorada.

Quadro 4.7: Descrição das armaduras, para a secção deteriorada.

Secção central do vão intermédio			Secção sobre o pilar P1	
Variável	Área nominal	Posição da armadura ⁽¹⁾	Área nominal	Posição da armadura ⁽¹⁾
Armadura ordinária, S500				
A_{s1}	–	–	–	–
A_{s2}	6.03 cm ²	0.239 m	6.03 cm ²	0.239 m
A_{s3}	6.03 cm ²	0.385 m	6.03 cm ²	0.385 m
A_{s4}	17.59 cm ²	0.603 m	17.59 cm ²	0.603 m
A_{s5}	98.40 cm ²	0.760 m	150.67 cm ²	0.760 m
Armadura de pré-esforço, S1680/1860				
A_p	76 cm ²	0.170 m	76 cm ²	0.650 m
Nota: (1) posicionamento da armadura relativamente à fibra inferior da secção.				

Assim, com todos os dados acima expostos, já é possível calcular a resistência da secção aos esforços de flexão. Substituindo os valores dos momentos actuantes presentes no quadro 4.5 na equação 4.3 e determinando, com recurso ao referido programa “secção”, o momento resistente. A equação 4.3 que traduz a verificação de segurança da secção aos esforços de flexão, para a ponte sem anomalias pode ser reescrita da seguinte forma, para os momentos positivos:

$$14165.0 \geq 1.35 \cdot 2288.2 + 1.35 \cdot 587.1 + 1.35 \cdot 2867.7 \text{ (kNm)} \quad (4.4)$$

que após a realização dos cálculos leva à seguinte inequação:

$$14165.0 \text{ kNm} \geq 7753.1 \text{ kNm OK} \quad (4.5)$$

E para os momentos negativos:

$$11758.8 \geq 1.35 \cdot 4342.6 + 1.35 \cdot 1114.2 + 1.35 \cdot 2535 \text{ (kNm)} \quad (4.6)$$

que calculando leva à seguinte inequação:

$$11758.8 \text{ kNm} \geq 10788.9 \text{ kNm OK} \quad (4.7)$$

Nas figuras 4.15 e 4.16 é possível observar respectivamente o diagrama momento-curvatura da resposta da secção aos esforços de flexão para a secção central do vão intermédio e para a secção sobre o pilar P1.

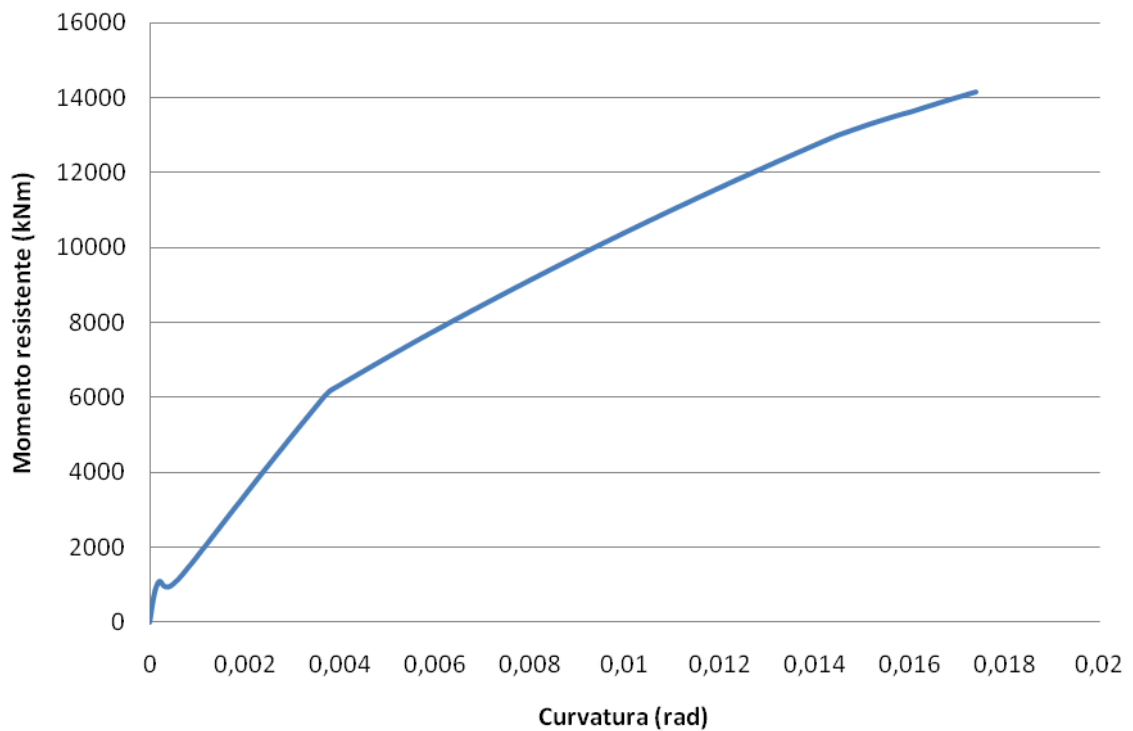


Fig. 4.15– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção central, intacta, do vão intermédio aos esforços de flexão.

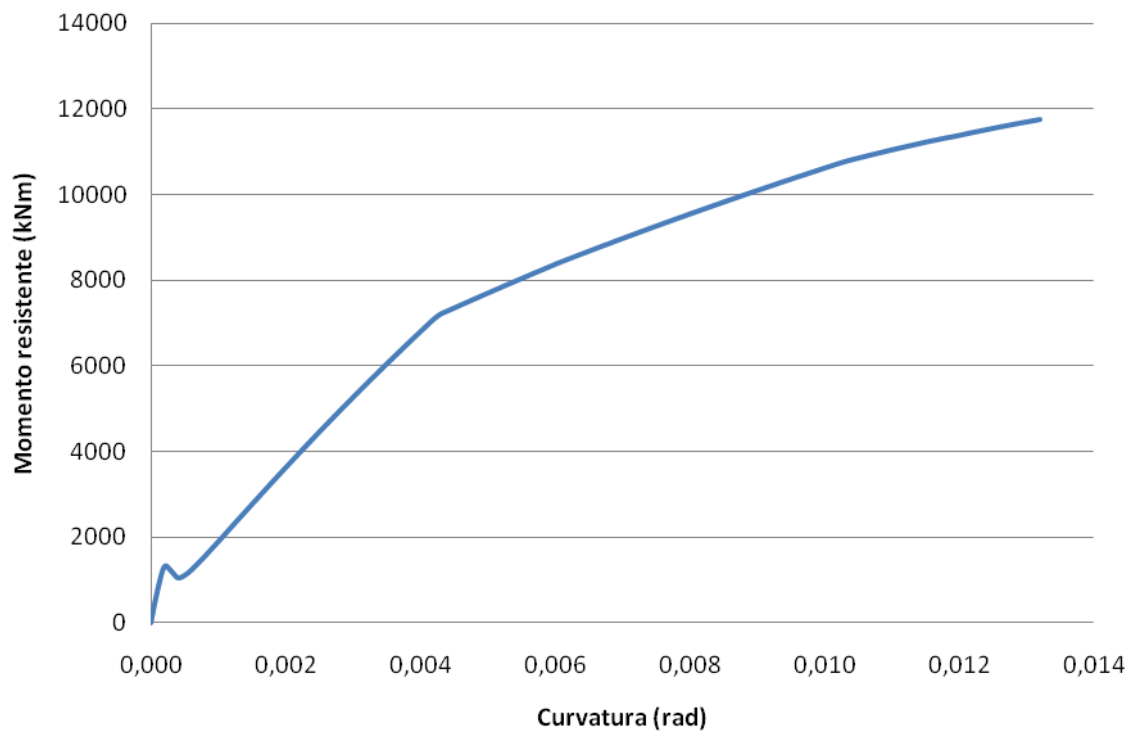


Fig. 4.16– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção, intacta, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.

Como se pode extrair da equação 4.5, a ponte verifica o critério encontrando-se segura e apresenta uma significativa margem de segurança, com uma resistência de quase o dobro do valor das acções consideradas, para a secção central do vão intermédio. E verificando a equação 4.7, a ponte verifica igualmente o critério de segurança, apresentando contudo nesta secção, sobre o pilar P1, uma margem de segurança consideravelmente inferior à anterior. Analisando agora conjuntamente os diagramas momento-curvatura (figuras 4.15 e 4.16) da resposta das secções aos esforços de flexão, pode-se observar que estas secções poderão ainda possuir alguma resistência, a que este método de análise não consegue aceder. Isto acontece porque tal como se pode verificar nos diagramas (figuras 4.15 e 4.16) a resposta da secção não entra em patamar, ou seja, as armaduras não plastificaram. Se numa análise mais sofisticada, se conseguir que a resposta entre em conta com esta plastificação das armaduras o valor da resistência será possivelmente superior. Esta hipótese será verificada no nível de avaliação seguinte onde é realizada uma metodologia probabilística.

Foram agora efectuados os mesmos cálculos mas para a situação onde a ponte apresenta anomalias ao nível das armaduras, perda total da armadura ordinária inferior, A_{sl} , e perda de três dos sete cabos de pré-esforço presentes na secção. Reescrevendo a equação 4.3 com estas considerações, obtém-se a inequação que se segue, para a secção central do vão intermédio:

$$7058.5 \geq 1.35 \cdot 2288.2 + 1.35 \cdot 587.1 + 1.35 \cdot 2867.7 \text{ (kNm)} \quad (4.8)$$

realizando os cálculos:

$$7058.5 \text{ kNm} \leq 7753.1 \text{ kNm KO} \quad (4.9)$$

E para a secção sobre o pilar P1:

$$9288.0 \geq 1.35 \cdot 4342.6 + 1.35 \cdot 1114.2 + 1.35 \cdot 2535 \text{ (kNm)} \quad (4.10)$$

simplificando:

$$9288.0 \text{ kNm} \leq 10788.9 \text{ kNm KO} \quad (4.11)$$

Apresenta-se agora também nas figuras 4.17 e 4.18 os respectivos diagramas momento-curvatura da resposta da secção aos esforços de flexão para a secção central do vão intermédio e para a secção sobre o pilar P1.

Analisando os resultados obtidos nas verificações expressas pelas equações 4.9 e 4.11, com a deterioração a que a ponte se encontra sujeita, esta não verifica os critérios de segurança presentes nos Eurocódigos. Mas analisando os diagramas da resposta da secção, pode-se presumir que a secção sobre o pilar P1 tem ainda bastante resistência a que este método de análise não conseguiu aceder, pois apresenta um diagrama de rotura semelhante ao da resposta das secções intactas. Para a secção central do vão intermédio, tal já não se verifica. Pois, no diagrama existe uma nítida zona de patamar o que é indicativo da plastificação das armaduras, deixando a sensação que esta secção já se encontra muito próximo do seu comportamento real. Contudo, a utilização de um método mais sofisticado de avaliação permite avaliar melhor este comportamento e aceder a reservas de resistência a que este método semi-probabilístico dos coeficientes parciais de segurança não consegue aceder, podendo desta maneira ser possivelmente verificada a segurança.

Assim, atendendo ao método dos cinco níveis que se está a utilizar para avaliar a ponte em questão, passar-se-ia agora para o seguinte nível do método. O segundo nível de avaliação utiliza métodos de determinação da resistência mais refinados. Contudo, tal como acima foi referido, passar-se-á directamente para o quinto nível onde a metodologia empregue na avaliação da segurança é uma metodologia probabilística.

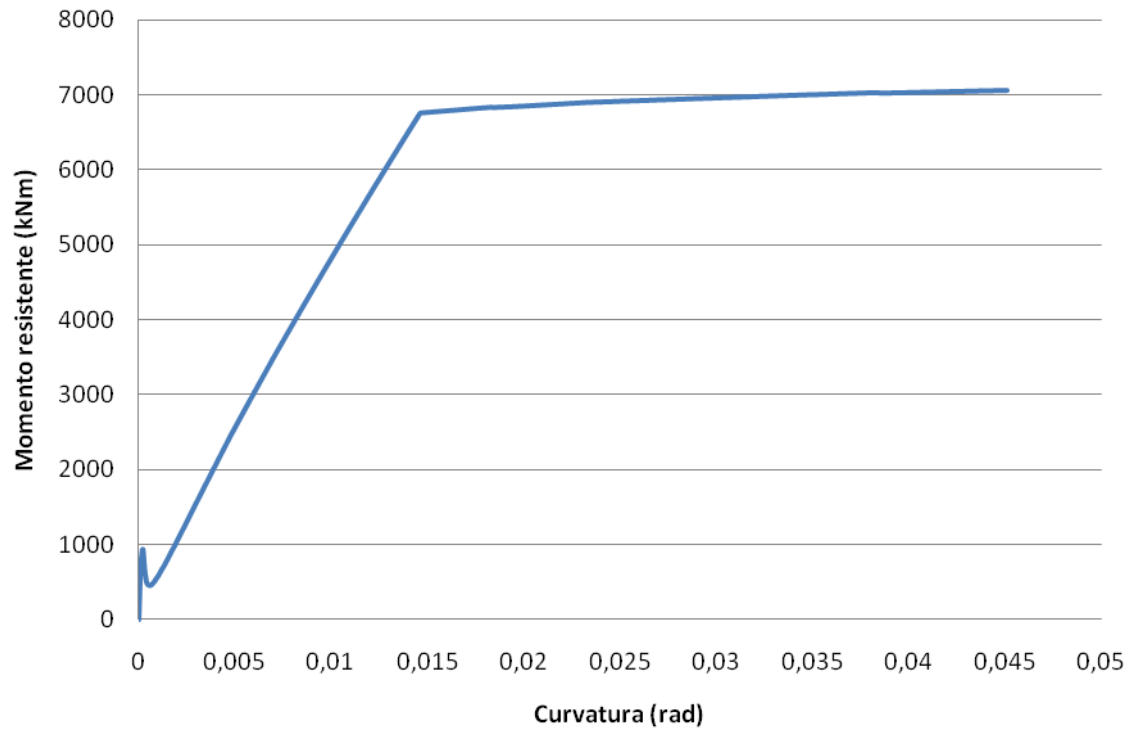


Fig. 4.17– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção central, deteriorada, do vão intermédio aos esforços de flexão.

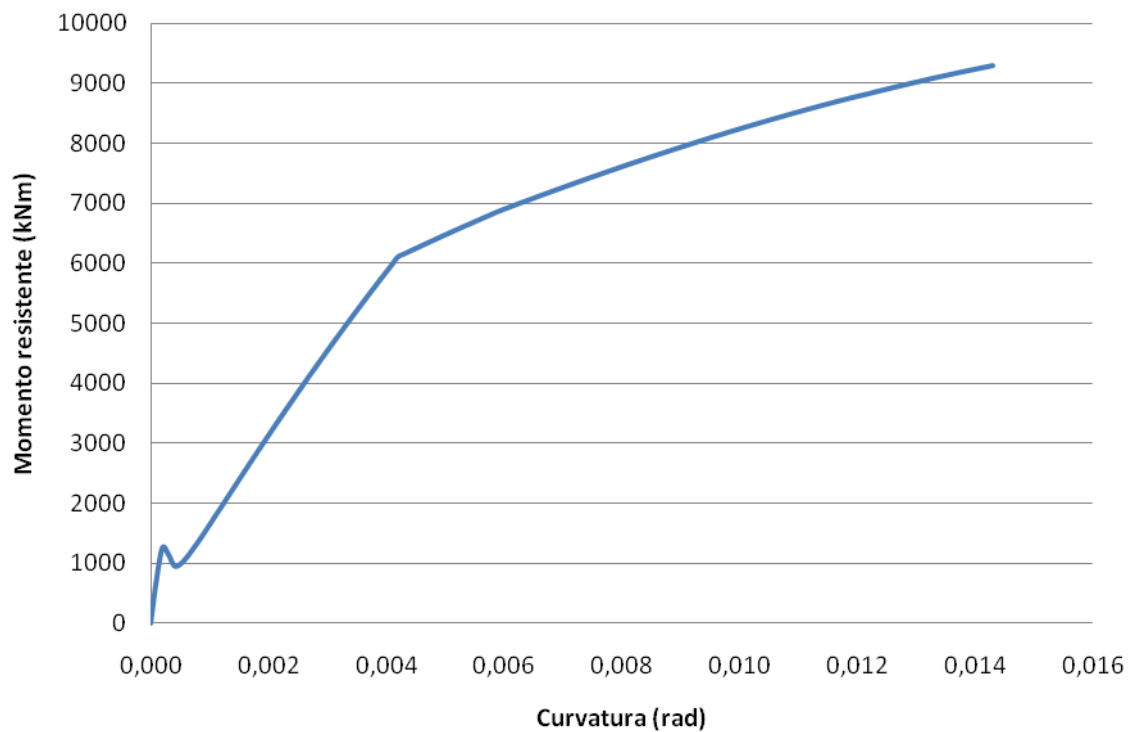


Fig. 4.18– Diagrama momento-curvatura da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.

5º Nível de Avaliação de Segurança

Neste nível de avaliação de segurança, a metodologia utilizada para a obtenção do modelo de resistência probabilístico da secção sujeita a esforços de flexão é o método do Hipercubo Latino. A análise foi então levada a cabo adoptando o seguinte encadeamento de tarefas.

Em primeiro lugar será realizada uma análise de sensibilidade para se proceder à filtragem das variáveis intervenientes na resposta da secção presentes os quadros 4.3 e 4.4. De forma, a permitir perceber quais as variáveis que mais contribuem para a resistência da secção. À luz disto, será reduzido o número de variáveis aleatórias apenas às variáveis relevantes a serem introduzidas na resolução pelo método do Hipercubo Latino.

Em segundo lugar é gerado um conjunto de valores para cada uma das variáveis aleatórias consideradas relevantes após a realização do passo anterior através do método do Hipercubo Latino.

De seguida é realizada uma análise não-linear da secção para cada uma das combinações das variáveis aleatórias, perfazendo um total de 100 simulações.

Após a execução das simulações é efectuado uma análise aos resultados de forma a obter o valor médio, o desvio padrão e o tipo de distribuição de probabilidade da resistência da secção aos esforços de flexão.

É testada a aplicabilidade da distribuição normal à resistência da secção aos esforços de flexão, através do método de Kolmogorov-Smirnov versão modificada de Lilliefors descrito na secção 3.5. A normalidade é verificada quando o parâmetro, D_n^* , obtido for inferior ao parâmetro referente a um nível de significância de 0.05. Sendo este nível considerado comum para este tipo de teste.

$$D_n^* \leq 1.364 \quad (4.12)$$

Realizados estes passos pode agora ser executada a análise de fiabilidade. Esta análise é definida pela seguinte função estado limite:

$$g(X) = M_R - (M_{G_S} + M_{G_A} + M_Q) \quad (4.13)$$

Desta forma, o valor do índice de fiabilidade definido na equação 3.33 pode ser apresentado como se segue:

$$\beta = \frac{\mu_{M_R} - (\mu_{M_{G_S}} + \mu_{M_{G_A}} + \mu_{M_Q})}{\sqrt{\sigma_{M_R}^2 + \sigma_{M_{G_S}}^2 + \sigma_{M_{G_A}}^2 + \sigma_{M_Q}^2}} \quad (4.14)$$

Onde μ_{M_R} é o valor médio da resistência à flexão para secção em análise, $\mu_{M_{G_S}}$ é o valor médio o momento flector devido ao peso próprio da estrutura para secção em análise, $\mu_{M_{G_A}}$ é o valor médio o momento flector devido às cargas permanentes adicionais para secção em análise, μ_{M_Q} é o valor médio o momento flector devido à sobrecarga de utilização rodoviária para secção em análise. E σ_{M_R} é o desvio padrão da resistência à flexão para secção em análise, $\sigma_{M_{G_S}}$ é o desvio padrão do momento flector devido ao peso próprio da estrutura para secção em análise, $\sigma_{M_{G_A}}$ é o desvio padrão do momento flector devido às cargas permanentes adicionais para secção em análise, σ_{M_Q} é o desvio padrão do momento flector devido à sobrecarga de utilização rodoviária para secção em análise.

Por fim, a segurança da estrutura é avaliada comparando os valores obtidos, segundo as combinações 1 e 2 de acções, do índice de fiabilidade para os dois casos em análise, a segurança da secção central do vão intermédio para a ponte com anomalias e a segurança da secção sobre o pilar P1 também com anomalias, com os valores alvo presentes no quadro 3.1.

$$\beta \geq \beta_{alvo} \quad (4.15)$$

Antes de avançar com a análise de fiabilidade, é necessário tecer algumas considerações relativamente aos materiais que foram tomadas nesta análise. Assim, contrariamente ao primeiro nível de avaliação onde a extensão de rotura à compressão do betão foi tomada, como expresso no EC-2 (2004), igual a 3.5‰, neste nível de avaliação a extensão de rotura será assumida igual a 1‰. Pois a adopção do valor de 3.5‰ é mais apropriada para a utilização do diagrama parábola-rectângulo presente no regulamento. A adopção do valor de 1‰ para a avaliação probabilística é tomada de forma a tirar partido de um comportamento mais próximo do real, esta adopção vai de acordo ao diagrama tensões-extensões presente na figura 4.9. Quanto ao aço poderiam ter sido adoptadas extensões de rotura superiores, assumindo que se tratavam de aços mais recentes com uma ductilidade maior. No entanto, tal não foi visto como necessário.

Desta forma, apresentados os passos principais e as considerações tomadas quanto aos materiais relativamente a esta avaliação, apresenta-se agora o processo de análise.

Nesta primeira fase proceder-se-á a uma filtragem das variáveis, de forma a reduzir as variáveis aleatórias de que são realmente importantes na resposta da secção aos esforços de flexão. Assim, de acordo com o algoritmo de filtragem de variáveis exibido na secção 3.5, no quadro 4.8 apresenta-se as variáveis aleatórias que foram alvo de uma análise de sensibilidade.

Quadro 4.8: Variáveis consideradas na análise de filtragem.

<i>i</i>	Variáveis aleatórias	<i>i</i>	Variáveis aleatórias
1	f_c	12	y_{s1}
2	f_{ct}	13	y_{s2}
3	E_c	14	y_{s3}
4	f_{sy}	15	y_{s4}
5	E_s	16	y_{s5}
6	ϵ_{su}	17	f_{pu}
7	A_{s1}	18	E_p
8	A_{s2}	19	ϵ_{pu}
9	A_{s3}	20	A_p
10	A_{s4}	21	y_p
11	A_{s5}	22	P

Tal como em todo este exemplo, a análise de sensibilidade das variáveis aleatórias será realizada para as duas secções em questão. O desfasamento considerado na avaliação dos coeficientes de sensibilidade associados a cada variável foi considerado igual a um ($h=1$, equação 3.39). Desta forma, a equação 3.42 referente aos coeficientes de sensibilidade, simplifica da seguinte forma:

$$b_i = \frac{\frac{|M_{Ri} - M_{Rm}|}{M_{Rm}}}{\frac{1 \cdot \sigma_{x_i}}{\mu_{x_i}}} \quad (4.16)$$

E as equações referentes à medida de importância $(b\sigma)_i$ e à medida de importância relativa $(b\sigma)_i^{rel}$ em função do valor máximo da medida de importância $(b\sigma)_{max}$, simplificam também como se segue:

$$(b\sigma)_i = b_i \cdot \frac{\sigma_{x_i}}{\mu_{x_i}} \quad (4.17)$$

$$(b\sigma)_i^{rel} = \frac{(b\sigma)_i}{(b\sigma)_{max}} \quad (4.18)$$

Nos quadros 4.9 e 4.10 apresentam-se os resultados das análises de filtragem das variáveis aleatórias intervenientes na resposta da secção central do vão intermédio e da secção sobre o pilar P1, respectivamente.

Quadro 4.9: Resultado da análise de filtragem das variáveis da secção intermédia do vão central.

i	Variáveis aleatórias	b_i	$(b\sigma)_i$	$(b\sigma)_i^{rel}$
1	f_c	9.92%	0.76%	41.98%
2	f_{ct}	0.00%	0.00%	0.00%
3	E_c	3.47%	0.28%	15.25%
4	f_{sy}	30.32%	1.82%	100.00%
5	E_s	4.72%	0.23%	12.71%
6	ϵ_{su}	0.00%	0.00%	0.04%
7	A_{s1}	30.81%	0.62%	33.86%
8	A_{s2}	1.09%	0.02%	1.20%
9	A_{s3}	0.69%	0.01%	0.76%
10	A_{s4}	0.16%	0.00%	0.18%
11	A_{s5}	2.44%	0.05%	2.68%
12	y_{s1}	2.57%	0.05%	2.83%
13	y_{s2}	0.63%	0.01%	0.69%
14	y_{s3}	1.02%	0.02%	1.12%
15	y_{s4}	4.42%	0.09%	4.85%
16	y_{s5}	39.18%	0.78%	43.06%
17	f_{pu}	75.21%	1.65%	90.95%
18	E_p	1.44%	0.03%	1.67%
19	ϵ_{pu}	0.00%	0.00%	0.00%
20	A_p	30.02%	0.60%	33.00%
21	y_p	9.46%	0.19%	10.39%
22	P	22.19%	1.33%	73.16%

Quadro 4.10: Resultado da análise de filtragem das variáveis da secção sobre o pilar P1.

i	Variáveis aleatórias	b_i	$(b\sigma)_i$	$(b\sigma)_i^{rel}$
1	f_c	16.87%	1.30%	66.01%
2	f_{ct}	0.00%	0.00%	0.00%
3	E_c	3.90%	0.31%	15.86%
4	f_{sy}	32.81%	1.97%	100.00%
5	E_s	5.02%	0.25%	12.51%
6	ε_{su}	0.00%	0.00%	0.00%
7	A_{s1}	3.51%	0.07%	3.56%
8	A_{s2}	0.03%	0.00%	0.03%
9	A_{s3}	0.21%	0.00%	0.21%
10	A_{s4}	2.53%	0.05%	2.57%
11	A_{s5}	30.54%	0.61%	31.03%
12	y_{s1}	2.05%	0.04%	2.08%
13	y_{s2}	0.06%	0.00%	0.06%
14	y_{s3}	1.16%	0.02%	1.18%
15	y_{s4}	3.98%	0.08%	4.05%
16	y_{s5}	43.33%	0.87%	44.02%
17	f_{pu}	61.56%	1.35%	68.79%
18	E_p	0.68%	0.01%	0.73%
19	ε_{pu}	0.00%	0.00%	0.00%
20	A_p	23.46%	0.47%	23.84%
21	y_p	35.77%	0.72%	36.34%
22	P	21.91%	1.31%	66.77%

Como é possível constatar, os quadros 4.9 e 4.10 apresentam sucessivamente as medidas de sensibilidade b_i , $(b\sigma)_i$ e $(b\sigma)_i^{rel}$ (ver expressões 4.16, 4.17 e 4.18), resultantes das 23 análises da resposta da secção, uma com valores médios e as restantes 22 com valores para as variáveis aleatórias (quadro 4.8) desfasadas de acordo com o algoritmo descrito. Serão excluídas da análise, consideradas variáveis não relevantes, as variáveis que cumpram a seguinte condição:

$$(b\sigma)_i^{rel} \leq 10\% \quad (4.19)$$

Assim de acordo com os resultados obtidos, para a secção central do vão intermédio (quadro 4.9) e a expressão 4.19, a variabilidade da resposta desta secção aos esforços de flexão depende principalmente das seguintes variáveis: f_c , E_c , f_{sy} , E_s , f_{pu} , P , y_p , y_5 , A_p e A_{s1} .

Relativamente aos resultados obtidos para a secção sobre o pilar P1 (quadro 4.10) e à expressão 4.19, as variáveis que mais influenciam a variabilidade da resposta desta secção são as seguintes: f_c , E_c , f_{sy} , E_s , f_{pu} , P , y_p , y_s , A_p e A_{s5} .

Realizado o processo de filtragem das variáveis onde foi possível constatar quais as variáveis que são realmente relevantes para resposta da secção aos esforços de flexão, estas variáveis serão tomadas com aleatórias com os parâmetros estatísticos presentes nos quadros 4.3 e 4.4. As restantes variáveis serão consideradas na análise como constantes e tomarão o seu valor médio. Desta forma, atendendo à metodologia exposta na secção 3.4.2.2 para o método do Hipercubo Latino, conjuntamente com o programa de cálculo automático “secção” foram realizadas 100 simulações para se determinar a resposta das duas secções em análise com as anomalias acima referidas, ou seja, total deterioração da primeira camada de armadura ordinária, A_{s1} , e rotura de três dos sete cabos de pré-esforço da ponte.

Após esta determinação, serão apresentados os resultados da análise de fiabilidade da estrutura para as duas combinações de carga.

Determinação da Resposta aos Esforços de Flexão para a Secção, Deteriorada, Central do Vão Intermédio.

Desta forma, os resultados para a secção central do vão intermédio encontram-se expostos de seguida. Na figura 4.19 estão patentes os diagramas momento-curvatura para as 100 simulações efectuadas de acordo com o método do Hipercubo Latino.

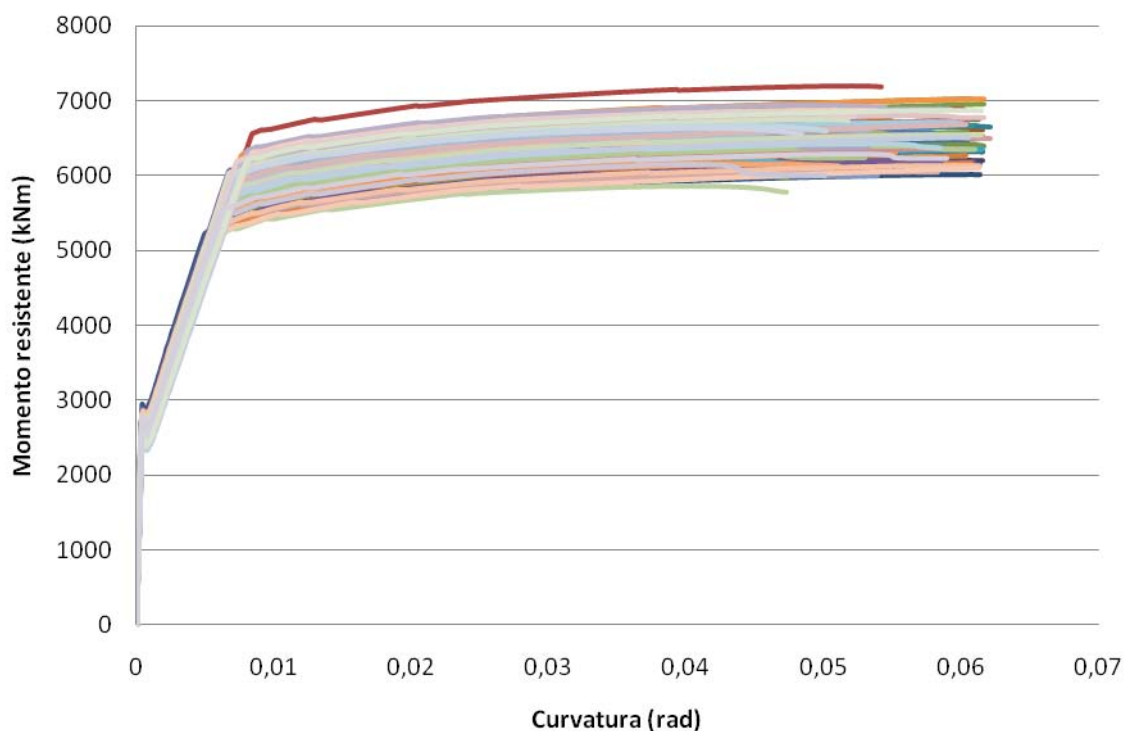


Fig. 4.19– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, deteriorada, central do vão intermédio aos esforços de flexão.

De seguida, após a obtenção dos resultados expressos pelos diagramas acima ilustrados, foi realizado um tratamento estatístico aos resultados obtidos para o momento resistente da secção em questão aos

esforços de flexão. Os resultados deste tratamento estatístico encontram-se expostos no quadro seguinte:

Quadro 4.11: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção central do vão intermédio.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Assimetria	Achatamento	
							Erro padrão	Erro padrão
Momento resistente	100	5860,58	7191,98	6494,9472	269,0051	0,079	0,241	-0,490
							0,478	

Atendo aos dados presentes no quadro 4.11, da estatística descritiva do momento resistente, foi realizado o teste de Kolmogorov-Smirnov versão modificada de Lilliefors para confirmar a aplicabilidade da distribuição normal aos resultados da resposta da secção aos esforços de flexão. Os resultados deste teste e o histograma com a respectiva curva da distribuição normal são apresentados na figura 4.20.

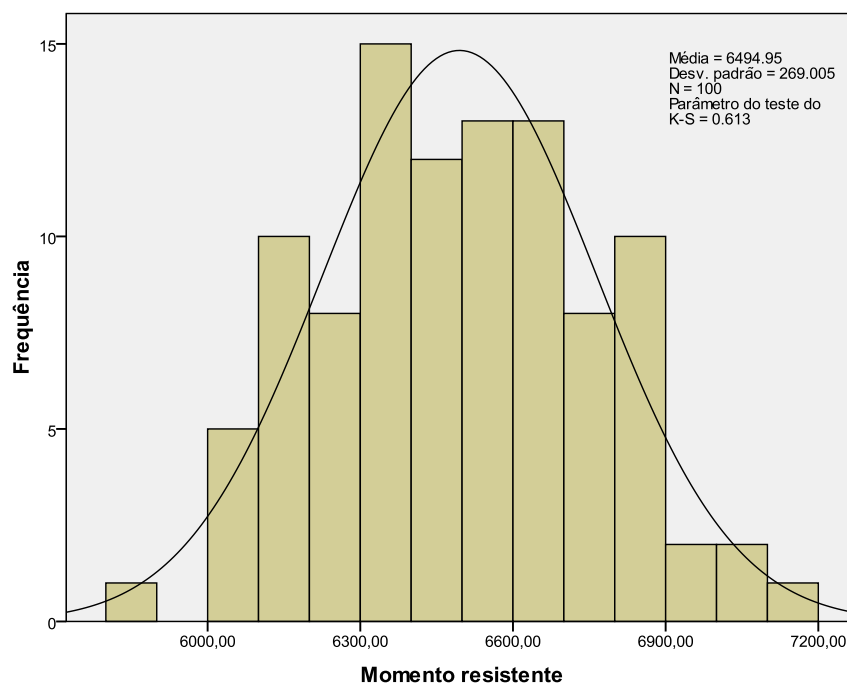


Fig. 4.20– Histograma da resposta da secção, deteriorada, central do vão intermédio aos esforços de flexão.

Está aferida a aplicabilidade da normalidade aos resultados da resposta da secção, pois sendo o parâmetro do teste de Kolmogorov-Smirnov, D_n^* , igual a 0.613, este verifica o exposto na equação 4.12.

Encontrando-se a normalidade conferida, estão assim determinados, os parâmetros da resistência da secção aos esforços de flexão que permitem a realização da análise de fiabilidade.

Determinação da Resposta aos Esforços de Flexão para a Secção, Deteriorada, Sobre o Pilar P1.

Realizando agora o mesmo processo mas para a secção sobre o pilar P1, encontra-se na figura 4.21 os diagramas momento-curvatura para as 100 simulações realizadas segundo a metodologia do Hipercubo latino.

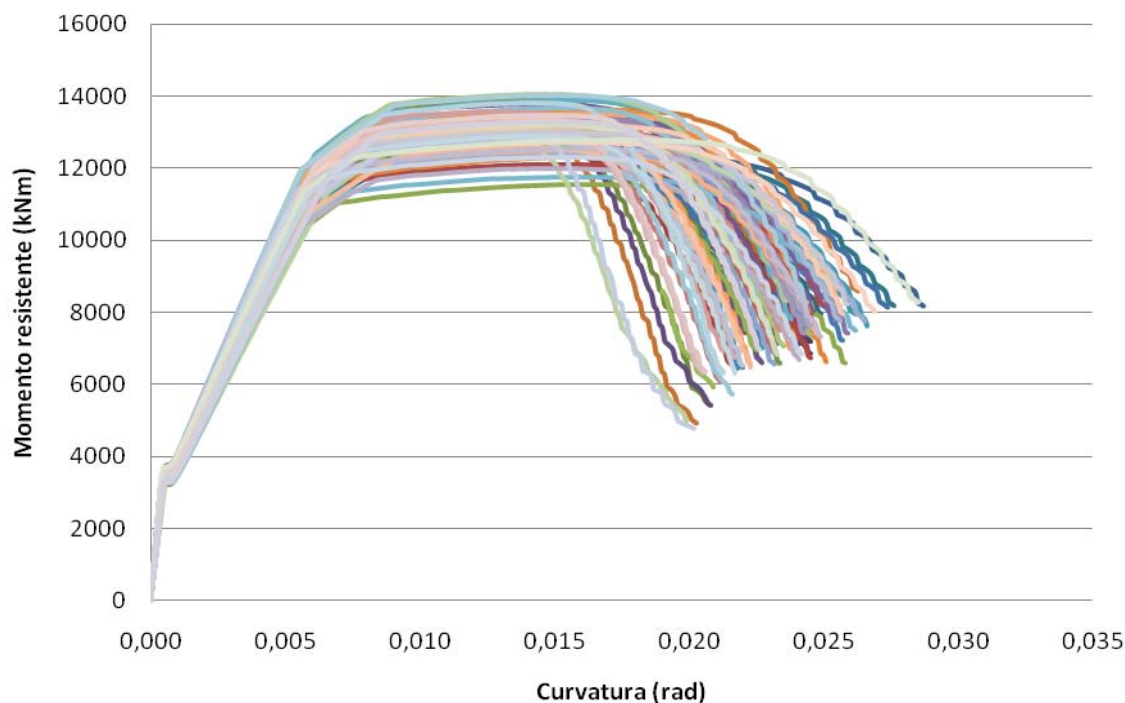


Fig. 4.21– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.

Tal como para a secção central do vão intermédio, foi realizado um tratamento estatístico aos resultados obtidos para a resposta da secção. A estatística descritiva destes resultados encontra-se sumariada no quadro 4.12.

Quadro 4.12: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção sobre o pilar P1.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Assimetria	Achatamento	
							Erro padrão	Erro padrão
Momento resistente	100	11536,66	14061,55	12935,5091	499,7146	-0,021	0,241	0,016
							0,478	

Ponderando estes dados, tal como anteriormente, é agora necessário confirmar a aplicabilidade da distribuição normal aos resultados obtidos para a resposta da secção aos esforços de flexão através da realização do teste de Kolmogorv-Smirnov versão modificada de Lilliefors. Encontrando-se os resultados desta verificação no histograma presente na seguinte figura.

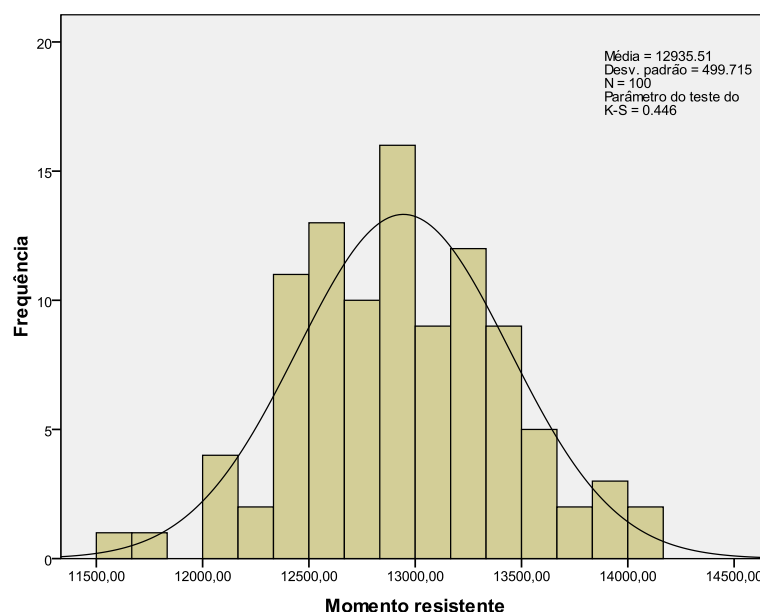


Fig. 4.22– Histograma da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.

Observando na figura 4.22 que o parâmetro do teste de Kolmogorv-Smirnov, para a resposta da secção sobre o pilar P1, toma o valor de 0.446, de acordo com a expressão 4.12, está deste modo verificada a normalidade dos resultados obtidos.

Concluído o cálculo da resistência das secções deterioradas em análise, pode resumir-se no quadro seguinte os parâmetros relevantes desta resistência para a análise de fiabilidade.

Quadro 4.13: Momento resistente nas secções críticas.

Variável aleatória	Descrição	Valor médio	Desvio padrão	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
M_{RV}	Secção central do vão intermédio	6494.9472 kNm	269.0051 kNm	4.14 %	Normal
M_{Rp}	Secção sobre o pilar P1	12935.5091 kNm	499.7146 kNm	3.86 %	Normal

E nos quadros 4.14 e 4.15, o sumário dos momentos actuantes para as duas combinações de acções respectivamente, de acordo com o quadro 4.5:

Quadro 4.14: Momentos actuantes da combinação de acções 1 nas secções críticas (figura 4.7).

Variável aleatória	Descrição	Valor médio	Desvio padrão	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
M_{S1v}	Secção intermédia do vão central	5743 kNm	471.158 kNm	8.20 %	Normal
M_{S1p}	Secção sobre o pilar P1	7290.5 kNm	456.904 kNm	6.27 %	Normal

Quadro 4.15: Momentos actuantes da combinação de acções 2 nas secções críticas (figura 4.8).

Variável aleatória	Descrição	Valor médio	Desvio padrão	Coeficiente de variação	Tipo de distribuição
M_{S2v}	Secção intermédia do vão central	5029.6 kNm	376.004 kNm	7.48 %	Normal
M_{S2p}	Secção sobre o pilar P1	7991.8 kNm	526.969 kNm	6.59 %	Normal

Estando a resistência das secções por fim calculada e resumida no quadro 4.13, conjuntamente com os dados presentes nos quadros 4.14 e 4.15, serão agora realizadas as análises de fiabilidade para as duas combinações de acções (ver figuras 4.7 e 4.8).

Verificação da combinação de acções 1

Assim, para a primeira combinação de acções o índice de fiabilidade para a secção central do vão intermédio, de acordo com a equação 4.14, é determinado do seguinte modo:

$$\beta = \frac{6494.9472 - 5743}{\sqrt{(269.0051)^2 + (451.158)^2}} = 1.39 \quad (4.20)$$

E para a secção sobre o pilar P1:

$$\beta = \frac{12935.5091 - 7290.5}{\sqrt{(499.7146)^2 + (456.904)^2}} = 8.33 \quad (4.21)$$

Comparando os valores obtidos para os índices de fiabilidade com os presentes no quadro 3.1, para a classe de fiabilidade, RC-3, equação 4.15, constata-se que a secção central do vão intermédio não verifica a segurança, devendo por isso ser considerada insegura.

$$1.39 < 4.3 \quad (4.22)$$

Para a secção sobre o pilar P1, está verificada a segurança pois o valor do índice de fiabilidade é mais do dobro do valor de referência:

$$8.33 > 4.3 \quad (4.23)$$

Isto é, apresenta uma grande margem de segurança, este aspecto permite que se considere a opção da realização de uma redistribuição dos esforços actuantes, de modo a tirar partido desta elevada margem de segurança.

Portanto, será agora realizada uma redistribuição dos esforços actuantes, numa tentativa de verificar a segurança na secção central do vão intermédio mantendo contudo a segurança na secção sobre o pilar P1, ainda que com uma margem de segurança inferior.

Deste modo, na redistribuição dos esforços, será determinado o momento actuante na secção central do vão intermédio que verifica o índice de fiabilidade alvo, $\beta = 4.3$. De seguida é verificada a redução que é necessária aplicar a este momento, ΔM , e este valor é adicionado ao momento actuante na secção sobre o pilar P1. Desta forma, a distância, h , que é a distância entre a secção de meio vão e a recta que

une os momentos nos apoios, é mantida (ver figura 4.23). Este é um parâmetro importante que é necessário ter o cuidado de manter.

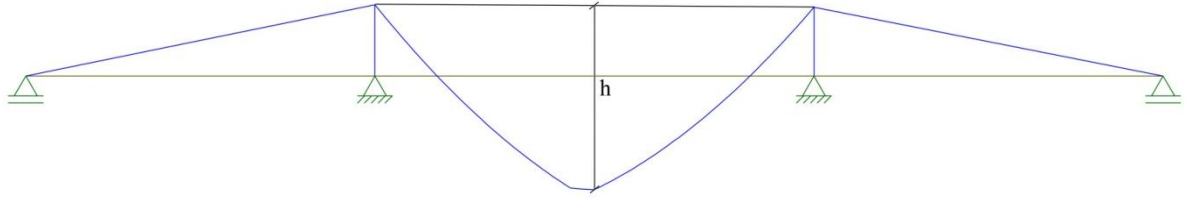


Fig. 4.23— Ilustração do parâmetro, h , da redistribuição da acções.

Atendendo a isto, na equação seguinte apresenta-se o valor da redução necessária aplicar ao momento actuante para que a secção central do vão intermédio verifique o índice de fiabilidade estipulado.

$$\beta = \frac{6494.9472 - M}{\sqrt{(269.0051)^2 + (M \cdot 0.0820)^2}} = 4.3 \Leftrightarrow M = 4524.4 \text{ kNm} \quad (4.24)$$

Desta forma, a variação do momento resultante é:

$$\Delta M = 5743 - 4524.4 = 1218.6 \text{ kNm} \quad (4.25)$$

Adiciona-se esta variação do momento actuante à secção sobre o pilar P1, e o momento actuante resultante, M_{S1p} , toma o novo valor de:

$$M_{S1p} = 7290.5 + 1218.6 = 8509.1 \text{ kNm} \quad (4.26)$$

Assumindo, que o coeficiente de variação do momento actuante se mantém inalterado, apesar deste acréscimo, o índice de fiabilidade para a secção sobre o pilar P1, após esta redistribuição dos esforços actuantes, encontra-se presente na equação 4.23.

$$\beta = \frac{12935.5091 - 8509.1}{\sqrt{(499.7146)^2 + (8509.1 \cdot 0.0627)^2}} = 6.05 \quad (4.27)$$

Como se pode verificar, após esta redistribuição dos esforços actuantes na ponte, a redução do índice de fiabilidade presente na equação 4.27, não foi suficiente para causar a não verificação da segurança na secção sobre o pilar P1.

Assim, com um índice de fiabilidade na secção central do vão intermédio, $\beta = 4.3$, e na secção sobre o pilar P1, $\beta = 6.05$. Está verificada a segurança de ambas as secções da ponte e por conseguinte a da passagem superior.

Verificação da combinação de acções 2

Será agora realizada uma verificação idêntica à anterior, apenas será utilizada a combinação de acções 2, cujos valores dos momentos actuantes se encontram resumidos no quadro 4.15. Deste modo, para a secção central do vão intermédio, o índice de fiabilidade é igual a:

$$\beta = \frac{6494.9472 - 5029.6}{\sqrt{(269.0051)^2 + (376.004)^2}} = 3.16 \quad (4.28)$$

Este índice para a secção sobre o pilar P1 toma o seguinte valor:

$$\beta = \frac{12935.5091 - 7991.8}{\sqrt{(499.7146)^2 + (526.969)^2}} = 6.80 \quad (4.29)$$

Analisando os resultados obtidos, verifica-se que para a combinação de acções 2 o índice de fiabilidade, da secção central do vão intermédio da passagem superior, não cumpre, tal como a combinação 1, o valor para a classe analisada, RC-3 (equações 4.30 e 4.31).

$$3.16 < 4.3 \quad (4.30)$$

e

$$6.80 > 4.3 \quad (4.31)$$

Desta forma, tal como na combinação anterior, será necessário proceder a uma redistribuição dos esforços.

O momento actuante para o qual a secção central do vão intermédio verifica o critério de segurança, $\beta \geq 4.3$, encontra-se presente na equação 4.32.

$$\beta = \frac{6494.9472 - M}{\sqrt{(269.0051)^2 + (M \cdot 0.0748)^2}} = 4.3 \Leftrightarrow M = 4613.5 \text{ kNm} \quad (4.32)$$

Assim a variação do momento é igual a:

$$\Delta M = 5029.6 - 4613.5 = 416.1 \text{ kNm} \quad (4.33)$$

O momento actuante resultante sobre o pilar P1, M_{S2p} , passa a tomar o seguinte valor:

$$M_{S2p} = 7991.8 + 416.1 = 8407.9 \text{ kNm} \quad (4.34)$$

É agora possível recalcular o índice de fiabilidade para a secção sobre o pilar P1:

$$\beta = \frac{12935.5091 - 8407.9}{\sqrt{(499.7146)^2 + (8407.9 \cdot 0.0659)^2}} = 6.06 \quad (4.35)$$

Tal como no caso anterior, após a realização da redistribuição dos esforços, ambas as secções em análise verificam os critérios de segurança da análise de fiabilidade efectua. Sendo assim, a passagem superior é considerada segura aos esforços de flexão para esta combinação de acções.

Determinação da Resposta aos Esforços de Flexão para as Secções, Intactas, Central do Vão Intermédio e Sobre o Pilar P1.

A título de exemplo foi também realizada uma análise de fiabilidade de forma a calcular o índice de fiabilidade para as secções intactas. Estas análises são meramente informativas e servem para se verificar o nível de segurança inicial as secções, pois em nada são necessárias para a realização da análise de fiabilidade das secções deterioradas. Assim de seguida, apresenta-se os resultados decorrentes da análise das secções intactas.

Expõe-se nas figuras 4.24 e 4.25 os respectivos diagramas momento-curvatura das 100 simulações realizadas de acordo com a metodologia do Hipercubo Latino.

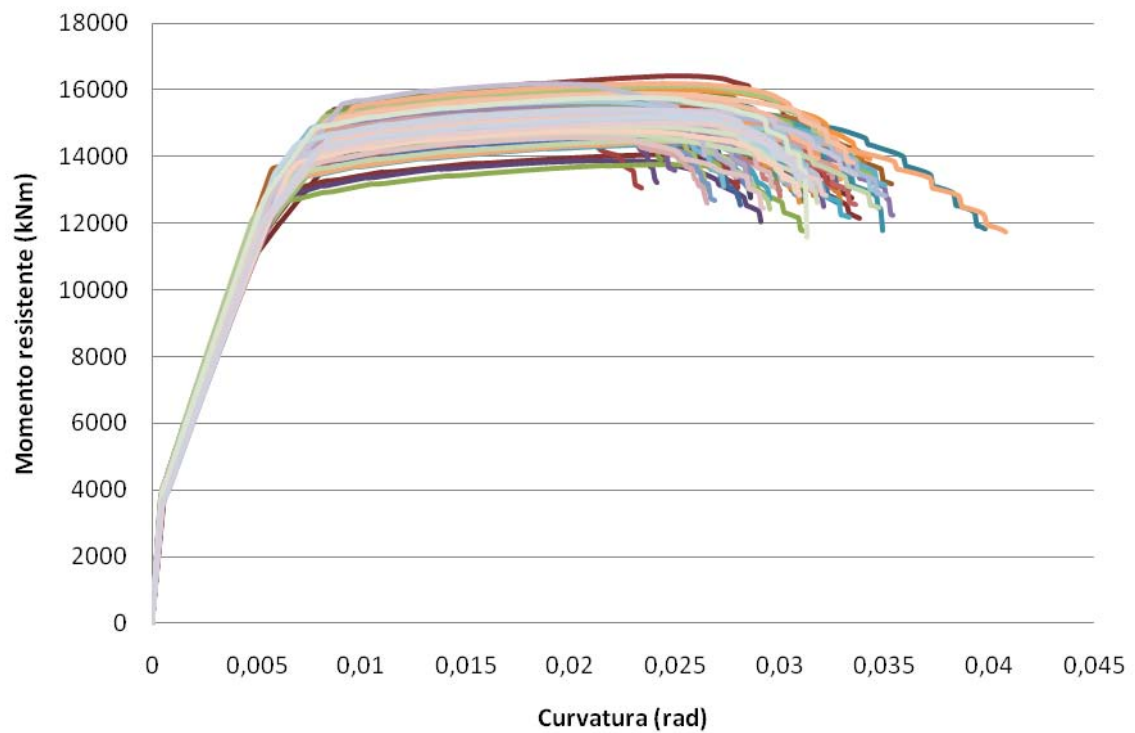


Fig. 4.24– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, intacta, central do vão intermédio aos esforços de flexão.

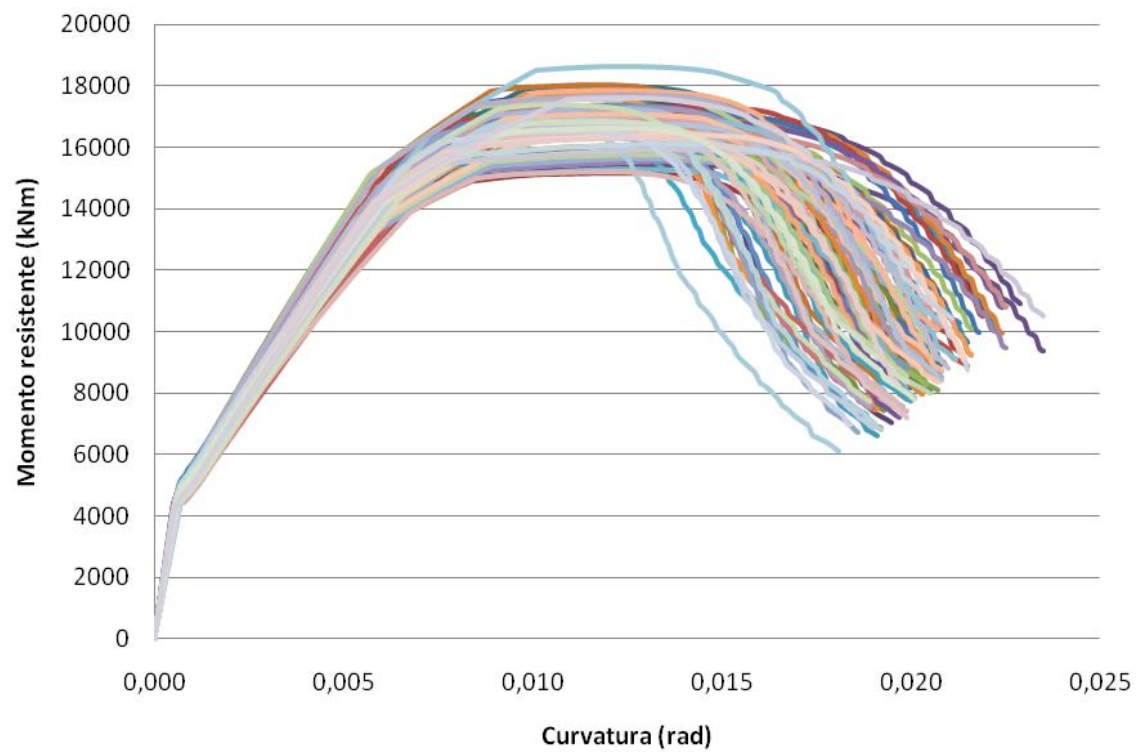


Fig. 4.25– Diagramas momento-curvatura das 100 simulações da resposta da secção, intacta, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.

De igual forma aos processos anteriores, também foi realizada um tratamento estatístico aos resultados. Encontrando-se os resultados desta estatística descritiva resumidos nos quadros que se seguem:

Quadro 4.16: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção central do vão intermédio.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Assimetria	Achatamento		
							Erro padrão	Erro padrão	
Momento resistente	100	13760,48	16416,77	15209,8756	496,2943	-0,127	0,241	0,400	0,478

Quadro 4.17: Resultados da estatística descritiva dos resultados para o momento resistente da secção sobre o pilar P1.

	N	Mínimo	Máximo	Média	Desvio padrão	Assimetria	Achatamento		
							Erro padrão	Erro padrão	
Momento resistente	100	15152,19	18626,24	16791,4353	613,2545	-0,319	0,241	0,979	0,478

Realizou-se agora o teste de Kolmogorov-Smirnov versão modificada de Lilliefors de forma a confirmar também que as respostas das secções intactas seguem uma lei normal. Apresenta-se, nas figuras 4.26 e 4.27, estes resultados sob a forma do histograma da resposta com a respectiva curva da lei normal aproximada.

A hipótese dos resultados da resposta das secções seguir uma lei normal é verificada. Pois em ambos os casos os parâmetros do teste de Kolmogorv-Smirnov, 0.426 e 0.936 respectivamente para a secção central do vão intermédio e a secção sobre o pilar P1, conferem o pressuposto presente na equação 4.12.

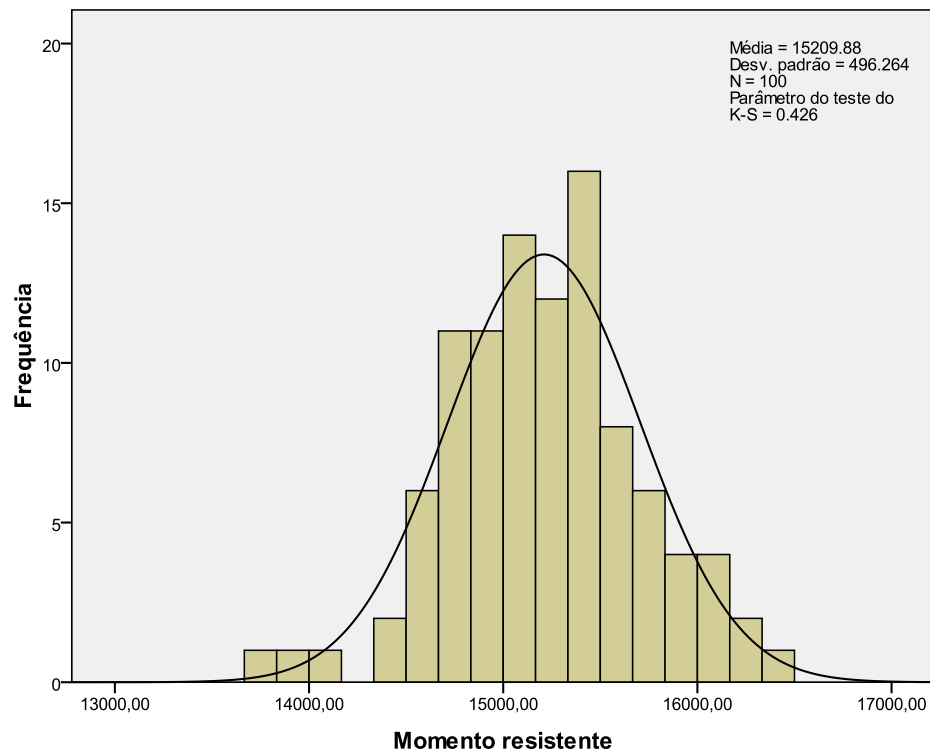


Fig. 4.26– Histograma da resposta da secção, deteriorada, central do vão intermédio aos esforços de flexão.

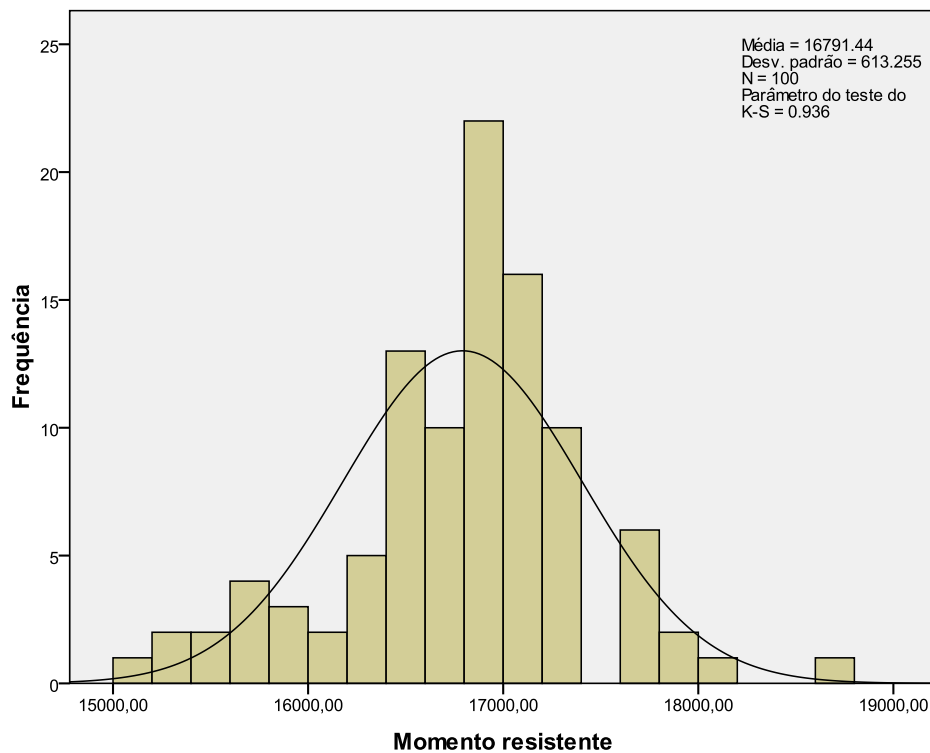


Fig. 4.27– Histograma da resposta da secção, deteriorada, sobre o pilar P1 aos esforços de flexão.

Determinada a resistência das secções intactas, é agora possível determinar os índices de fiabilidade para as duas combinações de acções. Assim, para a combinação de acções 1, o índice de fiabilidade para a secção central do vão intermédio é:

$$\beta = \frac{15209.8756 - 5743}{\sqrt{(496.2943)^2 + (471.158)^2}} = 13.83 \quad (4.36)$$

e para a secção sobre o pilar P1:

$$\beta = \frac{16791.4353 - 7290.5}{\sqrt{(613.2545)^2 + (471.158)^2}} = 12.42 \quad (4.37)$$

Da mesma forma, para a combinação de acções 2, são respectivamente os seguintes:

$$\beta = \frac{15209.8756 - 5029.6}{\sqrt{(496.2943)^2 + (376.004)^2}} = 16.35 \quad (4.38)$$

e

$$\beta = \frac{16791.4353 - 7991.8}{\sqrt{(613.2545)^2 + (526.969)^2}} = 10.88 \quad (4.39)$$

4.6. CONCLUSÃO

Nesta secção serão examinados os resultados obtidos para as análises de fiabilidade efectuadas à passagem superior, segundo as combinações de carga 1 e 2. Sendo também tecidas algumas conclusões sobre o estado de segurança da passagem superior.

Analizando em primeiro lugar os resultados da análise efectuada para a combinação de carga 1. Esta combinação de carga, é a que produz um maior momento positivo na secção central do vão intermédio. Deste modo, verifica-se que nesta secção ocorre uma redução muito significativa do índice de fiabilidade, pois este, passa de 13.83, para a secção intacta, para 1.39, para a secção deteriorada. Com esta redução tão significativa, o índice de fiabilidade desta secção deteriorada já não cumpre o limite mínimo expresso no EC-0 (2002). Esta redução significativa era em parte esperada pois a deterioração simulada afecta em grande escala as armaduras resistentes nesta secção, a armadura ordinária inferior e a armadura de pré-esforço. Como tal, a secção, nestas condições de deterioração e carga, tem de ser classificada como insegura.

Analizando ainda os resultados da análise realizada para a secção sobre o pilar P1, segundo a combinação de acções 1, verifica-se que apesar das severas anomalias simuladas, o índice de fiabilidade da secção intacta para a deteriorada passa de um valor de 12.42 para 8.33. Apesar de apresentar uma redução significativa do seu valor, o índice de fiabilidade da secção deteriorada, é ainda um assim um valor elevado, que leva a que esta secção da ponte seja considerada segura, e pode-se afirmar, com uma grande margem de segurança. Esta redução não tão significativa do índice de fiabilidade comparativamente à secção anterior, deve-se principalmente devido a que das armaduras principais de tracção desta secção somente a armadura de pré-esforço foi afectada. A outra armadura afectada foi a armadura ordinária inferior, que nesta secção é uma armadura de compressão, não sendo desta forma uma armadura tão preponderante na definição da resposta da secção aos esforços de flexão.

É de relembrar também que estes valores presentes no quadro 3.1 são valores para ser tidos em conta no processo de projecto de uma ponte nova. Como tal, necessitam ter uma grande margem, pois precisam de ter em conta todas as variáveis indeterminadas inerentes ao projecto de uma ponte nova, que no caso de uma avaliação já não são indeterminadas e podem ser apuradas. Exemplo disto é o caso da regulamentação dos Estados Unidos da América, AASHTO LRFD (1994) e AASHTO LRFR (2003), onde no primeiro regulamento, AASHTO LRFD (1994), é fixado o valor mínimo do índice de fiabilidade, $\beta=3.5$, para o dimensionamento de pontes. Este valor é fixado para a fiabilidade de um elemento isolado da ponte e para os estados limite últimos. No segundo regulamento, AASHTO LRFR (2003), valor do índice de fiabilidade é fixado igual a, $\beta=2.5$, para o processo de avaliação da segurança. Este valor é estabelecido para a avaliação da resistência de membros de pontes. É de salientar também que qualquer um destes dois valores definidos para o índice de fiabilidade não tem em conta a redundância da estrutura.

Como foi acima expresso o regulamento americano prevê, uma diminuição dos índices de fiabilidade alvo para o processo de projecto de uma ponte nova, quando se está a executar o processo de avaliação da segurança de estruturas existentes. Contudo, o regulamento europeu ainda não incorporou no seu texto esta variabilidade, decorrente da real diferença entre o processo de avaliação de estruturas existentes e o processo de dimensionamento de estruturas novas.

À luz disto, analisando a estrutura da passagem superior como um todo, considerando os dois valores do índice de fiabilidade para a secção central do vão intermédio e para a secção sobre o pilar P1, devido à elevada margem de segurança que ainda existe na secção sobre o pilar P1, sensivelmente o dobro do considerado mínimo para o processo de dimensionamento de estruturas novas. Concluiu-se que com a execução de um processo de redistribuição dos esforços, onde se reduziu o momento actuante na secção crítica, para um valor onde o índice de fiabilidade correspondente já verifica-se o critério de segurança, $\beta = 4.3$. Sobrecarregando a secção sobre o pilar P1, que como se constatou apresenta uma margem de segurança elevada. Deste modo, as secções em análise da passagem superior, após a realização deste procedimento de redistribuição, passaram a tomar os seguintes valores para o índice de fiabilidade: $\beta = 4.3$, para a secção central do vão intermédio e $\beta = 6.05$, para a secção sobre o pilar P1. Assim se conclui, que a passagem superior em questão, contrariamente ao verificado no nível de 1 da verificação, ainda pode se encontra segura. Deste modo, visto a ponte passar nas verificações de segurança aos estados limites último de flexão, não existe razão para condenar a ponte à sua substituição ou reforço. A ponte passará apenas a necessitar de ser alvo de procedimentos de manutenção, de modo a parar os processos de deterioração que levaram esta a este estado. E será necessário após esta intervenção controlar mais regularmente a ponte de forma a verificar se os processos implementados realmente pararam a deterioração da ponte, caso contrário, será necessário proceder a uma reavaliação para verificar se a ponte ainda se encontra segura, e se existe a necessidade de proceder a obras de reforço estruturais.

Analisa-se agora os resultados obtidos para a análise efectuada à ponte sujeita à combinação de carga 2. Esta combinação, é a combinação de carga que produz o maior momento negativo na secção sobre o pilar P1. Assim, nestas condições, verifica-se uma redução do índice de fiabilidade de 10.88 para 6.80, da secção intacta para a deteriorada. Esta redução, não foi o suficiente para classificar esta secção como insegura. Continuando esta secção, mesmo para este máximo momento negativo a apresentar uma margem de segurança elevada, como seria de esperar. Devido ao acima referido, de a deterioração simulada penalizar principalmente as armaduras resistentes aos momentos positivos. Visto isto, apesar de o momento actuante, na secção crítica para os momentos positivos, ser inferior ao considerado na combinação de acções 1, analisou-se também agora a fiabilidade desta secção. Deste modo, o índice de fiabilidade da secção central do vão intermédio, verificou uma redução da secção intacta para a

crítica de, 16.35 para 3.16, respectivamente. Continua a não verificar o critério da classe de fiabilidade, RC-3 ($\beta = 4.3$). Sendo assim, de igual modo à verificação da combinação 1, necessário aplicar um processo de redistribuição dos esforços de modo a tirar partido da hiperstaticidade da estrutura e da elevada margem de segurança presente na secção sobre o pilar P1. O procedimento realizado foi igual ao anterior, limitou-se o momento máximo na secção do vão ao valor correspondente ao índice de fiabilidade, $\beta = 4.3$, e sobrecarregou-se a secção sobre o pilar com o restante momento. Passando após a realização deste procedimento a secção central a ter um índice de fiabilidade, $\beta = 4.3$, e a secção sobre o pilar P1, $\beta = 6.06$. Mantendo-se nesta última, embora tenha ocorrido uma diminuição do índice de fiabilidade, a verificação da segurança.

Conclui-se assim das análises de fiabilidade realizadas às duas secções críticas da ponte, sujeitas a diferentes combinações de acções, que a aplicação de métodos mais sofisticados de verificação da segurança, isto é, realização de análises de fiabilidade recorrendo a métodos probabilísticos, e aplicando também procedimentos de redistribuição de esforços, tornam possível a classificação de estruturas, que de outro modo eram classificadas como inseguras, seguras. Pois permitem simular melhor o real comportamento da estrutura e aceder a reservas de resistência que a aplicação dos métodos regulamentares (semi-probabilísticos) não conseguem ter em conta.

5

CONCLUSÃO

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo resume-se o trabalho elaborado realçando os aspectos mais importantes e tecendo os principais comentários e conclusões a reter. Posteriormente serão indicados possíveis áreas e trabalhos a realizar como seguimento a esta dissertação, para melhorar o processo de avaliação da segurança de estruturas existentes.

5.2. CONCLUSÕES FINAIS

Este trabalho teve com principal objectivo apresentar uma metodologia de avaliação da segurança de estruturas existentes, dando especial ênfase à realização de uma análise de fiabilidade recorrendo a métodos probabilísticos.

Em primeiro lugar foram apresentadas as incertezas inerentes ao processo de projecto de estruturas novas e ao processo de avaliação de estruturas existentes. Foram também apresentadas as principais diferenças entre estes dois processos. De seguida, foram discutidas algumas das principais diferenças entre a execução de uma análise determinística e uma análise probabilística. Culminando esta parte do trabalho na apresentação da metodologia que se crê ser a mais adequada ao processo de avaliação de estruturas existentes. Esta metodologia baseia-se em cinco níveis de avaliação e assenta num conceito de etapas. Se a verificação de segurança falha uma etapa passa-se para a seguinte, onde os níveis crescentes de análise vão apresentando metodologias cada vez mais sofisticadas até ao quinto nível de análise onde é utilizado um método de análise probabilístico e é realizada uma análise de fiabilidade.

Após a apresentação deste método, e visto a formulação estatística ser um ponto de estudo deste trabalho, foram apresentados alguns fundamentos estatísticos. Foram também introduzidos os conceitos fundamentais inerentes à fiabilidade de estruturas, sendo neste ponto introduzido outro grande conceito de análise neste trabalho. Este ponto consistiu na apresentação de dois métodos de análise probabilísticos: o método da simulação de Monte Carlo e o método do Hipercubo Latino. Apresentados estes métodos foi realizado um exemplo de aplicação prático, nomeadamente a avaliação da segurança de uma viga simplesmente apoiada, onde houve uma alteração da sobrecarga e foi necessário realizar uma verificação da segurança. Nesta avaliação de segurança foi necessário recorrer a métodos de avaliação probabilísticos. Desta forma, foi utilizado este exemplo para a realização de um processo comparativo dos dois métodos referidos, a simulação de Monte Carlo e o do Hipercubo Latino. Assim, foi realizado o exemplo aplicando a metodologia da simulação de Monte Carlo e seguidamente utilizando a do Hipercubo Latino. Esta necessidade de realizar uma comparação dos dois métodos advém do elevado esforço computacional que o método da simulação de Monte

Carlo exige, e da hipótese da aplicação do método do Hipercubo Latino, que é um caso particular da metodologia do Monte Carlo onde é aplicada uma técnica de amostragem estratificada. Então, deste exemplo foi possível constatar a maior eficácia do método do Hipercubo Latino. Pois, a utilização deste método requer uma quantidade de amostras muito inferior ao da simulação de Monte Carlo, como foi possível constar neste exemplo, a metodologia do Hipercubo Latino apenas necessita de cerca de 1% a 10% do número de amostras que eram necessárias obter se fosse empregue o método de Monte Carlo. Finalizando este exemplo conclui-se que, visto que só o método de Monte Carlo com um número infinito de amostragens poderá conduzir a um resultado exacto, o resultado obtido aplicando o método do Hipercubo Latino apresenta a precisão necessária para execução deste tipo de análises. Deste modo, se a análise não exigir uma precisão especial, uma divisão do domínio de cada variável em 100 intervalos, é suficiente para obtenção de bons resultados. Pelo contrário, se for requerida uma melhor precisão destes, é aconselhada a divisão do domínio de cada variável em 1.000 intervalos.

De seguida, foi realizado um exemplo de aplicação onde se procede à avaliação da segurança de uma estrutura, tendo sido escolhido neste caso uma passagem superior sobre uma linha ferroviária. Neste exemplo foi aplicada parte da metodologia apresentada dos cinco níveis, nomeadamente o nível 1 e o nível 5. Neste nível 5, o método probabilístico escolhido para analisar a secção foi o método do Hipercubo Latino. Na realização deste exemplo, foi executado o processo de avaliação da estrutura empregando uma pequena simplificação na formulação do modelo de sobrecarga rodoviária do EC-1b (2002), o “LM1”. E na execução segundo esta simplificação foram ainda simulados dois estados de conservação da ponte, o primeiro onde a ponte se encontra sem anomalias, intacta, e o segundo onde a ponte se encontra com anomalias, apresentando uma deterioração completa da armadura ordinária inferior e uma deterioração parcial da armadura de pré-esforço. Simulando estes dois estados de conservação da ponte, foi então avaliada a segurança de duas secções consideradas críticas da ponte, a secção central do vão intermédio e a secção sobre o pilar P1, segundo duas combinações de acções. Assim, executando o nível 1 da avaliação, empregando o método semi-probabilístico presente nos regulamentos e as combinações de acções que produzem os momentos máximos, às duas secções críticas considerando estas com anomalias, verifica-se que estas reprovam a dita verificação. Desta forma, de acordo com a metodologia empregue, é necessário passar para o nível seguinte de avaliação. Mas como neste trabalho se está a dar especial atenção aos métodos probabilísticos, avançou-se directamente para o nível 5 da avaliação que emprega métodos probabilísticos e avalia a segurança recorrendo a uma análise de fiabilidade.

Por fim, recorrendo ao método do Hipercubo Latino, foi realizada a análise de fiabilidade para as duas secções críticas, para as duas combinações de acções. Desta avaliação, das duas secções que eram consideradas inseguras, verificou-se que a secção sobre o pilar P1 ainda dispunha de uma grande reserva de resistência, passando após esta análise a ser considerada segura. E a secção central do vão intermédio, verificou-se que apesar da aplicação deste método mais sofisticado de avaliação, continua a ser classificada como insegura, classificando deste modo a ponte como insegura. Contudo, de forma a tirar partido da hiperestaticidade da estrutura e da elevada margem de segurança verificada na secção sobre o pilar P1, foi realizado para cada uma das combinações de acções, procedimentos de redistribuição dos esforços. Realizando a verificação das secções após esta redistribuição, constata-se que a ponte, contrariamente ao verificado no nível 1 da análise de segurança, ainda é considerada segura. Não sendo por isso condenada à sua substituição. Esta necessitará apenas de ser alvo de processos de manutenção que cessem a deterioração verificada e seguida de processos de monitorização e inspecção mais frequentes.

Deste modo, da elaboração deste exemplo de aplicação e tendo em conta os vários cenários simulados, pode-se resumir as principais conclusões nas seguintes:

- A metodologia dos cinco níveis de avaliação é uma metodologia simples e que mostrou ser adequada para a avaliação de estruturas existentes, pois com os seus níveis de sofisticação crescente permite que estruturas consideradas inseguras, após a aplicação deste método possam não ser assim consideradas.
- Inerente à metodologia acima referida, no nível 5 da avaliação propõe-se a utilização do método probabilístico do Hipercubo Latino, como uma metodologia simples e que não exigindo um esforço computacional elevado, produz resultados com um bom nível de precisão. Apenas é pertinente salientar, que na utilização deste método de probabilístico, a necessidade de um bom processo de inspecção da estrutura em questão, de forma a ressaltar que não existe nenhuma anomalia severa em nenhum ponto específico desta.
- Foi também detectado, que os valores presentes no quadro 3.1, que definem os valores alvo do índice de fiabilidade propostos no EC-0 (2002), são valores muito conservativos. É verdade que se a estrutura cumprir estes valores estipulados, esta se encontra efectivamente segura. Contudo, estes valores podem levar a que estruturas ainda com uma reserva de segurança considerável, sendo assim seguras, sejam submetidas a processos desnecessários de reabilitação, reforço ou mesmo substituição.

Em suma, a metodologia abordada, juntamente com a análise de fiabilidade recorrendo ao método do Hipercubo Latino constituem uma ferramenta eficaz para a avaliação da segurança de estruturas existentes. Visto, como presente no exemplo abordado, esta ser uma metodologia relativamente simples e passível de ser utilizada na prática corrente para avaliar a segurança de estruturas.

5.3. DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Nesta secção do trabalho, onde se procurou apresentar a metodologia mais apropriada para a avaliação da segurança de estruturas existentes e o eficiente do Hipercubo Latino, expõe-se algumas questões que ficaram em aberto, suscita-se reflexões e novas pistas de trabalho. Deste modo, salienta-se os seguintes temas:

- Neste trabalho da metodologia proposta, apenas foi aprofundado o nível 5 da avaliação, deste modo é pertinente a realização de trabalhos que explorem os restantes níveis desta metodologia.
- Na exploração das metodologias probabilísticas foi escolhida a utilização do método do Hipercubo Latino para aplicar na avaliação da segurança, no entanto existem muitos outros métodos que poderiam ter sido abordados, assim a realização de um trabalho que proporcione um estudo comparativo entre as várias metodologias probabilísticas existentes permitirá definir com um melhor nível de certeza o método mais eficiente e apropriado à avaliação da segurança de estruturas existentes.
- Verificar a aplicabilidade e a eficiência do método do Hipercubo Latino no ajuste teórico de outras leis de distribuição que não a normal aos resultados da resposta das secções.
- Proceder à avaliação de um maior número de estruturas, não só de pontes mas também de estruturas porticadas de edifícios.
- Realização de trabalhos que permitam recolher dados referentes às grandezas envolvidas na avaliação de segurança, de modo a estabelecer modelos adequados que definam a incerteza destas grandezas. Para desta forma, se construir uma base de dados que aglomere o

conhecimento da variabilidade, tanto ao nível dos materiais, como da geometria dos elementos estruturais e das acções. Possibilitando que os vários trabalhos realizados tenham todos a mesma base, tornado possível uma melhor comparação dos resultados obtidos.

- Elaboração de um estudo aprofundado referente à fixação dos índices de fiabilidade apropriados ao processo de avaliação de estruturas existentes. Pois como foi possível constatar, os presentes no EC-0 (2002) para o processo de projecto de estruturas novas são demasiado conservativos para a aplicação no processo de avaliação.

BIBLIOGRAFIA

- Anjo, A.J.B., Fernandes, R., Carvalho, A.S. (2003), *Curso de Matlab*. Principia, 1ª edição, Cascais.
- AASHTO LRFD (1994). *Load and Resistance Factor Bridge Design Specification*. American Association of State Highways Transportation Officials, DC, Washington.
- AASHTO LRFR (2003). *Manual for Condition Evaluation and Load and Resistance Factor Rating of Highway Bridges*. American Association of State Highways Transportation Officials, DC, Washington.
- Ayyub, B.M., White, G.J. (1987). *Reliability-conditioned partial safety factors*. ASCE J. Struct. Div. Vol. 113, Nº 2, pp. 279-294.
- Baecher, G. (1982). *Sampling with decomposed variance*. ASCE J. Mech. Div., Nº EM5.
- BRIME (2001). *Bridge Management in Europe - Final Report D14*. IV Framework program, Brussels, disponível em <http://www.trl.co.uk/brime/>.
- CEB-FIP, Comité Euro-International du Béton (1978). *International system of unified standard codes of practice for structures*. Volume I, 'Common unified rules for different types of construction and material', CEB-FIP International Recommendations, 3ª edição.
- CEB-FIP (1991). *Model Code 1990 - Design Code*. Comité Euro-International du Béton, Lausanne.
- COST323 (1997). *Collection and Analysis of Needs and Requirements as Regards Weighing vehicles in Motion*. Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research, Brussels.
- COST345 (2004). *Procedures Required for the Assessment of Highway Structures. Numerical Techniques for Safety and Serviceability Assessment - Report of the Working Groups 4 and 5*. Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research, Brussels.
- Cruz, P.J.S., Neves, L.A.C. (2001). *Introdução à Análise Probabilística Simplificada da Segurança Estrutural*. Revista Engenharia Civil – UM, nº 12, pp. 65-80, disponível em http://www.civil.uminho.pt/cec/revista/Num12/Pag_65-80.pdf.
- Cruz, P.J.S., Wiśniewski, D.F. e Casas, J.R. (2008). *Métodos de Avaliação da Segurança de Pontes Existentes*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas. Série II, pp. 19-30, disponível em <http://hdl.handle.net/1822/8748>.
- Cruz, J. S., Lourenço, P.B. (2006). *Flexão simples: análise comparativa REBAP vs. EC2*. JPEE 2006: Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, 2006, Lisboa: LNEC, Lisboa, disponível em <http://hdl.handle.net/1822/6562>.
- Delgado, J. M. 2002. *Avaliação de segurança de estruturas reticuladas com comportamento não linear material e geométrico*. Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, disponível em <http://repositorio.up.pt/aberto/bitstream/10216/10957/2/Texto%20integral.pdf>.
- Ditlevsen, O. and H. O. Madsen. 2007. *Structural Reliability Methods*. Monograph, Coastal, Maritime and Structural Engineering, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark, disponível em <http://www.web.mek.dtu.dk/staff/od/books/OD-HOM-StrucRelMeth-Ed2.3.7-June-September.pdf>.
- Ditlevsen, O. (1991). *Bayesian decision analysis as a tool for structural engineering decisions*. COMMET - Advanced Short Course on Structural Reliability and Load Modelling, Lingby (Copenhagen).

- EC-0 (2002). *EN1990: Eurocode - Basis of Structural Design*. CEN, Brussels, final version.
- EC-1 (2002). *EN1991-1-1: Eurocode 1: Action on Structures - Part 1-1: General Actions - Densities, Self-weight, Imposed Loads for Buildings*. CEN, Brussels, final version.
- EC-1b (2002). *prEN1991-2: Eurocode 1: Action on Structures - Part 2: Traffic Loads on Bridges*. CEN, Brussels, final draft.
- EC-2 (2004). *EN1992-1-1: Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1: General Rules and Rules for Buildings*. CEN, Brussels, final version.
- EC-2b (2003). *prEN1992-2: Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 2: Concrete bridges. Design and Detailing Rules*. CEN, Brussels, stage 34.
- Florian, A. (1992). An Efficient Sampling Scheme: Updated Latin Hypercube Sampling. In *Probabilistic Engineering Mechanics*. Vol. 7, pp. 123-120.
- Guimarães, R.C., Cabral, J.A.S. (1997). *Estatística – Edição Revista*. McGraw-Hill, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Hahn, B.D. e Valentine, D.T. (2007). *Essential Matlab® for Engineers and Scientists*. Butter-Heinemann. 3ª edição.
- Haldar, A. & Mahadevan, S. (2000a). *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*. John Wiley & Sons, New York.
- Haldar, A. & Mahadevan, S. (2000b). *Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- Henriques, A.A.R. (1998). *Aplicação de Novos Conceitos de Segurança no Dimensionamento do Betão Estrutural*. Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, disponível em <http://paginas.fe.up.pt/~aarh/tese-A4.pdf>.
- Henriques, A.A.R. (2002). *Estruturas Pré-esforçadas. Programa de Análise à Rotura de Secções de Betão Armado Sujeitas à Flexão*. Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto.
- Husslage, B., Rennen, G., Van Dam, E., Den Hertog, D. (2008). *Space-filling Latin Hypercube designs for Computer Experiments*. CentER, Dezembro/2008, N° 104, Tilburg University, Tilburg, disponível em http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=895464.
- JCSS (2001). *Probabilistic Model Code*. Joint Committee on Structural Safety, 12º rascunho. <http://www.jcss.ethz.ch/>.
- JCSS (2001b). *Probabilistic Assessment of Existing Structures*. The publishing Company of RILEM, Cachan Cedex France, edited by D. Diamantidis.
- Laranja, R., Estevão, J. (2000) *Simulação Numérica na Avaliação da Fiabilidade de Estruturas de Betão Armado*. Encontro Nacional Betão Estrutural, 2000, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, pp. 295-301, Porto, disponível em <http://hdl.handle.net/10400.1/91>.
- Laranja, R. e Brito, J. (2003). *Verificação Probabilística da Segurança das Estruturas*. Revista Engenharia Civil – UM, nº 18, pp. 63-79, disponível em <http://hdl.handle.net/10400.1/48>.
- Lilliefors, H.W. (1967). *On the Kolmogorov-Smirnov tests for normality with mean and variance unknown*. Journal of American Statistical Association, Vol. 62, pp. 399-102.
- Lo, S.-H. (1989). *Stochastic finite element analysis*. Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- Mahadevan, S. (1997). Monte Carlo Simulation. In *Reliability-based Mechanical Design*, pp. 130-146, Ed. Thomas A. Cruse, Vanderbilt University.
- Melchers, R.E. (1999). *Structural Reliability Analysis and Prediction*. 2ª edição. John Wiley & Sons, Chichester.
- Monteiro, L.F.N.D.M. (1999). *Reforço de Estruturas de Betão Armado – Modelos de Dimensionamento e Verificação da Segurança*. Dissertação para Mestrado em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- Nowak, A.S. & Collins, K.R. (2000). *Reliability of Structures*. McGraw-Hill, New York.
- Olsson A., Sandberg G., Dahlblom O. (2003). *On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis*. Structural Safety, Vol. 25, pp. 47-68.
- O'Brien, E.J., Žnidarič, A., Brady, K., González, A., O'Connor, A. (2005). *Procedures for the Assessment of Highway Structures*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Transport, Vol. 158, nº 1, pp. 17-25, disponível em <http://www.thomastelford.com/journals/DocumentLibrary/TRAN1580104.pdf>.
- REBAP (1985). *Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado*. Ministério da Habitação, Obras Públicas e Transportes, Lisboa.
- RSA (1983). *Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes*. Ministério da Habitação, Obras Públicas e Transportes, Lisboa.
- SAMARIS (2005). *State of the Art Report on Assessment of Structures in Selected EEA and CE Countries - Deliverable D19*. Sustainable and Advanced Materials for Road Infrastructure - V Framework program, Brussels, disponível em <http://samaris.zag.si/>.
- Schneider, J. (1997). *Introduction to Safety and Reliability of Structures*. IABSE, Zürich.
- Sustainable Bridges (2006). *Guideline for Load and Resistance Assessment of Existing European Railway Bridges*. Sustainable Bridges - VI Framework Programme, Brussels.
- Teigen, J.G., Frangopol, D.M., Sture, S., Felippa, C. (1991). Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures. I: Theory. In *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 117, Nº 9, pp. 2674-2689.
- Thoft-Christensen, P., Baker, M.J. (1982) *Structural reliability theory and its application*. Springer-Verlag.
- Val, D., Bljurger, F., Yankelevsky, D. (1996). *Optimization Problem Solution in Reliability of Reinforced Concrete Structures*. Computers and Structures, Vol. 60, pp. 351-355.
- Val, D., Bljurger, F., Yankelevsky, D. (1997). *Reliability Evaluation in Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures*. Structural Safety, Vol. 19, pp. 203-217.
- Veiga, José M.G.C. (2008). *Métodos da Análise das Incertezas na Verificação da Segurança Estrutural em Engenharia Civil*. Dissertação para Doutoramento em Ciências de Engenharia, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Wiśniewski, D.F. (2007). *Safety Formats for the Assessment of Concrete Bridges - with special focus on precast concrete*. Dissertação para doutoramento em Engenharia Civil, Universidade do Minho, Guimarães, disponível em <http://hdl.handle.net/1822/6753>.

Wyss, G.D., Jorgensen, K.H. (1998). *A User's Guide to LHS: Sandia's Latin Hypercube Sampling Software*. Risk Assessment and Systems Modeling Department, Sandia National Laboratories, Albuquerque.

Random.org, <http://www.random.org/>, 13/03/2009

Research Randomizer, <http://www.randomizer.org/form.htm>, 26/03/2009

ANEXOS

Anexo 1

FICHEIRO DE DADOS TIPO DO PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO “SECÇÃO”.

Ficheiro de dados tipo do programa de cálculo automático “secção”, com as variáveis relevantes para a obtenção da resposta da secção central do vão intermédio intacta, que foram alteradas em cada simulação, a **sombreado**.

```

### Titulo do problema
Simulacao 1 momento positivo seccao intacta
### Variaveis de controle das dimensoes das variaveis:
# nmatc - n. de diferentes tipos de betao;
# nmats - n. de diferentes tipos de aco;
# ntlay - n. de camadas-tipo de betao;
# nclay - n. total de camadas de betao;
# nslay - n. total de camadas de aco;
# nmatc nmats ntlay nclay nslay
#      1      2      30      39      6
### Propriedades mecanicas do betao:
# imatc - numero do betao-tipo;
# Ec - Modulo de elasticidade;
# fc - tensao maxima de compressao;
# ecl - extensao correspondente a fc;
# fct - tensao maxima de traccao;
# ecr - extensao limite de fendilhacao;
# ecu - extensao de rotura em compressao;
# alfa - parametro de tension-stiffening
# imatc Ec fc ecl fct ecr ecu alfa
#      1 .28801E+08 38129.00 .00220 2816.00 .00015 .01000 .60000
### Propriedades mecanicas do aco:
# imats - numero do aco-tipo;
# Es - Modulo de elasticidade;
# Es1 - Modulo de rigidez do 2o. ramo;
# Es2 - Modulo de rigidez do 3o. ramo;
# fsy - tensao limite de elasticidade;
# fsyl - tensao limite do 2o. ramo;
# esu - extensao de rotura
# imats Es Es1 Es2 fsy fsyl esu
#      1 .21328E+09 .21328E+07 .21328E+00 626838.00 720863.00 .07500
#      2 .19900E+09 .19900E+07 .19900E+00 593433.00 790978.00 .03500
### Altura total da seccao
.800
### Camadas-tipo de betao:
# itlay - Numero da camada-tipo de betao;
# b1 - Largura da fibra inferior;
# b2 - Largura da fibra superior;
# h - Altura da camada;
# tipo - Numero do tipo de betao

```

#	itlay	b1	b2	h	tipo
	1	4.400	4.420	.018	1
	2	4.420	4.442	.020	1
	3	4.442	4.464	.020	1
	4	4.464	4.487	.020	1
	5	4.487	4.509	.020	1
	6	4.509	4.531	.020	1
	7	4.531	4.553	.020	1
	8	4.553	4.576	.020	1
	9	4.576	4.598	.020	1
	10	4.598	4.620	.020	1
	11	4.620	4.643	.020	1
	12	4.643	4.665	.020	1
	13	4.665	4.687	.020	1
	14	4.687	4.710	.020	1
	15	4.710	4.732	.020	1
	16	4.732	4.754	.020	1
	17	4.754	4.776	.020	1
	18	4.776	4.799	.020	1
	19	4.799	4.821	.020	1
	20	4.821	4.843	.020	1
	21	4.843	4.866	.020	1
	22	4.866	4.888	.020	1
	23	4.888	4.910	.020	1
	24	4.910	4.933	.020	1
	25	4.933	4.955	.020	1
	26	4.955	4.977	.020	1
	27	4.977	5.000	.020	1
	28	5.000	7.000	.025	1
	29	7.000	7.000	.022	1
	30	7.000	7.000	.017	1

Ordenacao das camadas de betao:

iclay - Numero da camada de betao;

y - Posicao da face inferior relativa/ fibra inferior;

itlay - Numero da camada-tipo de betao

#	iclay	y	itlay
	1	.000	1
	2	.018	2
	3	.038	3
	4	.058	4
	5	.078	5
	6	.098	6
	7	.118	7
	8	.138	8
	9	.158	9
	10	.178	10
	11	.198	11
	12	.218	12
	13	.238	13
	14	.258	14
	15	.278	15
	16	.298	16
	17	.318	17
	18	.338	18
	19	.358	19
	20	.378	20
	21	.398	21
	22	.418	22
	23	.438	23
	24	.458	24
	25	.478	25
	26	.498	26
	27	.518	27
	28	.538	28
	29	.563	29

```

30      .585      29
31      .607      29
32      .629      29
33      .651      29
34      .673      29
35      .695      29
36      .717      29
37      .739      29
38      .761      29
39      .783      30
### Camadas de aco:
# islay - Numero da camada de aco;
# y      - Posicao relativa/ fibra inferior;
# As     - Area da seccao transversal;
# tipo   - Numero do tipo de aco
# islay   y      As      tipo
# 1      .040    .0119287  1
# 2      .175    .0129170  2
# 3      .239    .0006032  1
# 4      .385    .0006032  1
# 5      .603    .0017593  1
# 6      .743    .0098395  1
### Forca axial aplicada
# -15300.000
### acrescimo de curvatura
# .0001000000
### Tolerancia e numero maximo de iteracoes por incremento
# toler miter
# 1.000 55
### Restantes dados
# b1      b2      d      tau1(B25) tau1(B45)
# 0.2     0.1     0.45    650      1000
# fctk    Sc,inf
# 2000    5000

```


Anexo 2

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS RELEVANTES UTILIZADAS NO CAPÍTULO 4.

SECÇÃO CENTRAL, INTACTA, DO VÃO INTERMÉDIO.

Divisão dos domínios das variáveis relevantes.

i	A_{s1}	A_p	E_c	f_c	E_s	f_{sy}	f_{pu}	P	y_p	y_s
1	0,011049	0,012615	2,4478E+07	30300	1,7912E+08	509783	1824376	12132	0,161	0,721
2	0,011142	0,012721	2,5464E+07	31463	1,8313E+08	524241	1841378	12476	0,163	0,727
3	0,011192	0,012778	2,5993E+07	32087	1,8529E+08	532000	1850503	12660	0,163	0,730
4	0,011227	0,012818	2,6361E+07	32522	1,8679E+08	537399	1856852	12789	0,164	0,732
5	0,011254	0,012849	2,6649E+07	32862	1,8796E+08	541632	1861831	12890	0,164	0,734
6	0,011277	0,012875	2,6890E+07	33146	1,8894E+08	545158	1865977	12973	0,165	0,736
7	0,011296	0,012897	2,7097E+07	33391	1,8979E+08	548206	1869561	13046	0,165	0,737
8	0,011314	0,012917	2,7282E+07	33609	1,9054E+08	550907	1872738	13110	0,165	0,738
9	0,011329	0,012935	2,7448E+07	33805	1,9121E+08	553345	1875605	13168	0,165	0,739
10	0,011344	0,012951	2,7600E+07	33984	1,9183E+08	555576	1878229	13221	0,166	0,740
11	0,011357	0,012967	2,7741E+07	34150	1,9241E+08	557640	1880657	13271	0,166	0,741
12	0,011369	0,012981	2,7872E+07	34305	1,9294E+08	559566	1882921	13316	0,166	0,742
13	0,011381	0,012994	2,7995E+07	34451	1,9344E+08	561376	1885050	13359	0,166	0,743
14	0,011392	0,013007	2,8112E+07	34589	1,9392E+08	563088	1887063	13400	0,166	0,743
15	0,011402	0,013019	2,8223E+07	34720	1,9437E+08	564714	1888975	13439	0,166	0,744
16	0,011412	0,01303	2,8329E+07	34844	1,9480E+08	566267	1890801	13476	0,167	0,745
17	0,011422	0,013041	2,8430E+07	34964	1,9521E+08	567754	1892551	13511	0,167	0,745
18	0,011431	0,013051	2,8528E+07	35079	1,9561E+08	569184	1894233	13545	0,167	0,746
19	0,01144	0,013062	2,8622E+07	35190	1,9599E+08	570564	1895855	13578	0,167	0,746

20	0,011449	0,013071	2,8713E+07	35298	1,9636E+08	571897	1897423	13610	0,167	0,747
21	0,011457	0,013081	2,8801E+07	35402	1,9672E+08	573190	1898943	13641	0,167	0,747
22	0,011465	0,01309	2,8886E+07	35503	1,9707E+08	574446	1900420	13670	0,167	0,748
23	0,011473	0,013099	2,8970E+07	35601	1,9741E+08	575668	1901857	13700	0,167	0,749
24	0,011481	0,013108	2,9051E+07	35697	1,9774E+08	576860	1903259	13728	0,168	0,749
25	0,011488	0,013116	2,9130E+07	35790	1,9807E+08	578024	1904628	13756	0,168	0,750
26	0,011496	0,013125	2,9208E+07	35882	1,9838E+08	579162	1905967	13783	0,168	0,750
27	0,011503	0,013133	2,9284E+07	35972	1,9869E+08	580278	1907279	13809	0,168	0,750
28	0,01151	0,013141	2,9359E+07	36060	1,9900E+08	581372	1908566	13835	0,168	0,751
29	0,011517	0,013149	2,9432E+07	36146	1,9929E+08	582447	1909830	13861	0,168	0,751
30	0,011523	0,013157	2,9504E+07	36231	1,9959E+08	583504	1911073	13886	0,168	0,752
31	0,01153	0,013164	2,9575E+07	36315	1,9988E+08	584545	1912297	13911	0,168	0,752
32	0,011537	0,013172	2,9645E+07	36398	2,0016E+08	585571	1913503	13935	0,168	0,753
33	0,011543	0,013179	2,9714E+07	36479	2,0044E+08	586582	1914693	13959	0,168	0,753
34	0,01155	0,013187	2,9782E+07	36559	2,0072E+08	587581	1915868	13983	0,169	0,754
35	0,011556	0,013194	2,9849E+07	36639	2,0099E+08	588569	1917029	14007	0,169	0,754
36	0,011562	0,013201	2,9916E+07	36717	2,0126E+08	589546	1918178	14030	0,169	0,754
37	0,011569	0,013208	2,9982E+07	36795	2,0153E+08	590513	1919315	14053	0,169	0,755
38	0,011575	0,013215	3,0047E+07	36872	2,0180E+08	591471	1920442	14076	0,169	0,755
39	0,011581	0,013222	3,0112E+07	36949	2,0206E+08	592422	1921560	14098	0,169	0,756
40	0,011587	0,013229	3,0176E+07	37025	2,0232E+08	593365	1922669	14121	0,169	0,756
41	0,011593	0,013236	3,0240E+07	37100	2,0258E+08	594301	1923770	14143	0,169	0,756
42	0,011599	0,013243	3,0303E+07	37175	2,0284E+08	595232	1924865	14165	0,169	0,757
43	0,011605	0,01325	3,0367E+07	37249	2,0310E+08	596158	1925953	14187	0,169	0,757
44	0,011611	0,013256	3,0429E+07	37324	2,0336E+08	597079	1927036	14209	0,169	0,758
45	0,011617	0,013263	3,0492E+07	37397	2,0361E+08	597996	1928115	14231	0,170	0,758
46	0,011623	0,01327	3,0554E+07	37471	2,0386E+08	598910	1929190	14253	0,170	0,758
47	0,011629	0,013277	3,0616E+07	37544	2,0412E+08	599822	1930262	14274	0,170	0,759
48	0,011634	0,013283	3,0678E+07	37617	2,0437E+08	600731	1931332	14296	0,170	0,759
49	0,01164	0,01329	3,0740E+07	37691	2,0462E+08	601639	1932400	14318	0,170	0,759
50	0,011646	0,013297	3,0802E+07	37764	2,0487E+08	602547	1933467	14339	0,170	0,760
51	0,011652	0,013303	3,0864E+07	37836	2,0513E+08	603453	1934533	14361	0,170	0,760

52	0,011658	0,01331	3,0926E+07	37909	2,0538E+08	604361	1935600	14382	0,170	0,761
53	0,011664	0,013317	3,0988E+07	37983	2,0563E+08	605269	1936668	14404	0,170	0,761
54	0,011669	0,013323	3,1050E+07	38056	2,0588E+08	606178	1937738	14426	0,170	0,761
55	0,011675	0,01333	3,1112E+07	38129	2,0614E+08	607090	1938810	14447	0,170	0,762
56	0,011681	0,013337	3,1174E+07	38203	2,0639E+08	608004	1939885	14469	0,170	0,762
57	0,011687	0,013344	3,1237E+07	38276	2,0664E+08	608921	1940964	14491	0,171	0,762
58	0,011693	0,01335	3,1299E+07	38351	2,0690E+08	609842	1942047	14513	0,171	0,763
59	0,011699	0,013357	3,1363E+07	38425	2,0716E+08	610768	1943135	14535	0,171	0,763
60	0,011705	0,013364	3,1426E+07	38500	2,0742E+08	611699	1944230	14557	0,171	0,764
61	0,011711	0,013371	3,1490E+07	38575	2,0768E+08	612635	1945331	14579	0,171	0,764
62	0,011717	0,013378	3,1554E+07	38651	2,0794E+08	613578	1946440	14602	0,171	0,764
63	0,011723	0,013385	3,1619E+07	38728	2,0820E+08	614529	1947558	14624	0,171	0,765
64	0,011729	0,013392	3,1684E+07	38805	2,0847E+08	615487	1948685	14647	0,171	0,765
65	0,011736	0,013399	3,1750E+07	38883	2,0874E+08	616454	1949822	14670	0,171	0,766
66	0,011742	0,013406	3,1817E+07	38961	2,0901E+08	617431	1950971	14693	0,171	0,766
67	0,011748	0,013413	3,1884E+07	39041	2,0928E+08	618419	1952132	14717	0,171	0,766
68	0,011755	0,013421	3,1952E+07	39121	2,0956E+08	619418	1953307	14741	0,172	0,767
69	0,011761	0,013428	3,2021E+07	39202	2,0984E+08	620429	1954497	14765	0,172	0,767
70	0,011768	0,013436	3,2091E+07	39285	2,1012E+08	621455	1955703	14789	0,172	0,768
71	0,011775	0,013443	3,2162E+07	39369	2,1041E+08	622496	1956927	14814	0,172	0,768
72	0,011781	0,013451	3,2234E+07	39454	2,1071E+08	623553	1958170	14839	0,172	0,769
73	0,011788	0,013459	3,2307E+07	39540	2,1100E+08	624628	1959434	14865	0,172	0,769
74	0,011795	0,013467	3,2382E+07	39628	2,1131E+08	625722	1960721	14891	0,172	0,770
75	0,011803	0,013475	3,2458E+07	39718	2,1162E+08	626838	1962033	14917	0,172	0,770
76	0,01181	0,013484	3,2536E+07	39810	2,1193E+08	627976	1963372	14944	0,172	0,770
77	0,011817	0,013492	3,2615E+07	39903	2,1226E+08	629140	1964741	14972	0,172	0,771
78	0,011825	0,013501	3,2696E+07	39999	2,1259E+08	630332	1966143	15000	0,173	0,771
79	0,011833	0,01351	3,2780E+07	40097	2,1293E+08	631554	1967580	15030	0,173	0,772
80	0,011841	0,013519	3,2865E+07	40198	2,1328E+08	632810	1969057	15059	0,173	0,773
81	0,011849	0,013529	3,2953E+07	40302	2,1364E+08	634103	1970577	15090	0,173	0,773
82	0,011858	0,013538	3,3044E+07	40410	2,1401E+08	635436	1972145	15122	0,173	0,774
83	0,011867	0,013549	3,3138E+07	40521	2,1439E+08	636816	1973767	15155	0,173	0,774

84	0,011876	0,013559	3,3236E+07	40636	2,1479E+08	638246	1975449	15189	0,173	0,775
85	0,011886	0,01357	3,3337E+07	40756	2,1520E+08	639733	1977199	15224	0,173	0,775
86	0,011896	0,013581	3,3443E+07	40880	2,1563E+08	641286	1979025	15261	0,174	0,776
87	0,011906	0,013593	3,3554E+07	41011	2,1608E+08	642912	1980937	15300	0,174	0,777
88	0,011917	0,013606	3,3671E+07	41149	2,1656E+08	644624	1982950	15341	0,174	0,777
89	0,011929	0,013619	3,3794E+07	41295	2,1706E+08	646434	1985079	15384	0,174	0,778
90	0,011941	0,013633	3,3925E+07	41450	2,1759E+08	648360	1987343	15429	0,174	0,779
91	0,011954	0,013649	3,4066E+07	41616	2,1817E+08	650424	1989771	15479	0,174	0,780
92	0,011969	0,013665	3,4218E+07	41795	2,1879E+08	652655	1992395	15532	0,175	0,781
93	0,011984	0,013683	3,4384E+07	41991	2,1946E+08	655093	1995262	15590	0,175	0,782
94	0,012002	0,013703	3,4569E+07	42209	2,2021E+08	657794	1998439	15654	0,175	0,783
95	0,012021	0,013725	3,4776E+07	42454	2,2106E+08	660842	2002023	15727	0,175	0,784
96	0,012044	0,013751	3,5017E+07	42738	2,2204E+08	664368	2006169	15810	0,176	0,786
97	0,012071	0,013782	3,5305E+07	43078	2,2321E+08	668601	2011148	15911	0,176	0,788
98	0,012106	0,013822	3,5673E+07	43513	2,2471E+08	674000	2017497	16040	0,177	0,790
99	0,012156	0,013879	3,6202E+07	44137	2,2687E+08	681759	2026622	16224	0,177	0,793
100	0,012249	0,013985	3,7188E+07	45300	2,3088E+08	696217	2043624	16568	0,179	0,799

Vectores de reordenação das variáveis anteriores.

<i>i</i>	Set-01	Set-02	Set-03	Set-04	Set-05	Set-06	Set-07	Set-08	Set-09	Set-10
1	89	8	21	80	55	84	75	87	95	13
2	61	61	81	34	15	51	1	13	77	30
3	32	100	7	98	98	29	39	12	21	78
4	22	30	17	63	11	53	86	69	74	1
5	62	29	59	55	80	86	24	18	61	76
6	67	31	92	12	71	22	89	66	83	47
7	66	5	32	73	60	49	85	8	35	62
8	36	39	71	15	19	13	2	63	82	77
9	9	85	43	77	4	8	52	53	84	21
10	100	50	87	9	21	94	11	35	36	71
11	77	72	38	11	64	55	59	44	65	83
12	41	37	39	99	66	10	99	99	15	22

13	59	97	88	3	27	36	46	73	12	24
14	8	92	83	95	100	69	54	14	20	98
15	86	77	61	19	76	75	47	2	32	48
16	74	4	11	32	2	18	58	100	30	75
17	70	16	100	43	67	59	27	57	87	60
18	14	40	96	61	81	99	22	25	64	14
19	95	48	69	54	41	2	34	79	88	66
20	94	71	19	40	47	54	38	92	60	41
21	43	88	55	18	96	67	8	55	85	23
22	13	46	3	52	34	61	29	95	29	67
23	75	82	60	47	43	80	16	26	55	34
24	35	73	70	76	10	82	23	45	93	92
25	10	99	15	27	54	9	9	59	81	85
26	83	68	16	2	20	39	81	72	38	5
27	92	83	4	97	51	85	91	56	13	7
28	63	28	2	88	36	16	73	60	56	81
29	65	79	98	78	9	100	15	94	63	11
30	56	18	63	69	38	93	49	64	25	4
31	96	49	68	1	74	5	44	11	22	10
32	46	62	1	60	40	42	45	91	4	26
33	11	93	67	6	30	83	66	17	69	33
34	88	84	23	79	39	30	88	50	39	12
35	6	3	42	56	65	90	43	47	68	39
36	34	53	72	51	6	32	37	74	23	46
37	31	78	74	87	42	27	20	89	72	17
38	18	64	47	50	48	73	68	30	40	29
39	5	1	20	91	49	12	10	67	43	70
40	60	11	46	71	24	19	77	77	50	61
41	25	36	82	23	62	62	97	46	54	37
42	71	23	29	74	79	66	70	4	70	51
43	19	67	13	81	25	81	36	52	46	93
44	52	45	76	82	50	68	32	42	37	6

45	38	95	18	14	58	76	33	48	90	69
46	47	65	6	75	75	74	28	86	28	79
47	37	34	22	89	28	34	55	49	76	32
48	30	17	36	10	37	44	53	33	17	20
49	23	69	80	59	59	88	80	78	1	52
50	48	6	56	84	16	35	100	71	99	96
51	29	57	90	41	29	50	35	7	73	65
52	93	89	24	26	94	96	12	16	71	19
53	90	24	62	64	93	3	6	40	58	56
54	68	27	95	67	45	97	62	22	51	84
55	64	13	26	13	77	91	87	98	24	9
56	72	25	78	7	90	37	13	84	7	90
57	58	10	9	45	88	92	17	10	92	88
58	24	26	91	25	1	72	84	31	67	35
59	4	80	94	21	56	46	25	19	27	15
60	84	70	40	24	5	25	93	83	11	53
61	17	22	10	39	91	77	7	43	8	64
62	99	44	31	22	13	20	63	93	19	86
63	49	91	93	53	72	87	65	65	41	89
64	79	75	34	38	44	95	5	34	79	99
65	2	59	8	42	22	57	69	36	53	55
66	87	21	99	90	53	1	42	75	48	82
67	57	76	52	31	82	24	21	85	100	100
68	40	20	49	20	26	28	26	23	6	95
69	76	55	25	100	35	31	19	97	10	97
70	53	19	37	68	23	38	79	54	14	27
71	50	66	64	62	84	43	96	58	9	31
72	80	87	89	33	85	63	30	1	45	63
73	1	98	51	65	73	41	60	82	49	42
74	98	58	77	93	14	45	57	15	34	8
75	73	43	66	48	7	65	64	88	89	44
76	44	38	27	72	92	64	76	81	5	68

77	16	7	79	30	61	26	82	37	91	72
78	85	52	57	83	68	7	98	3	47	28
79	39	33	97	37	97	98	3	70	98	87
80	28	2	5	29	78	78	48	27	66	16
81	15	56	85	86	52	14	18	80	16	49
82	12	94	14	92	3	23	74	32	97	57
83	81	96	41	5	70	6	90	24	44	18
84	33	51	86	44	86	56	94	20	57	43
85	3	60	65	57	18	79	40	29	52	74
86	20	42	30	46	87	21	78	76	62	94
87	45	12	54	35	17	70	50	38	75	2
88	97	90	12	16	57	58	83	9	26	40
89	26	14	28	58	12	48	72	5	3	45
90	27	35	53	36	32	60	56	21	86	54
91	7	63	44	4	63	4	92	51	94	91
92	69	54	33	28	95	33	41	96	96	3
93	78	47	48	17	69	40	14	41	31	50
94	82	81	84	94	33	15	61	39	2	36
95	91	15	58	70	89	71	95	90	80	25
96	55	9	35	8	8	17	67	68	18	59
97	54	32	50	96	31	47	31	28	33	80
98	51	41	75	66	83	89	4	62	59	58
99	21	86	73	85	99	52	71	61	42	38
100	42	74	45	49	46	11	51	6	78	73

Variáveis reordenadas:

i	A_{s1}	A_p	E_c	f_c	E_s	f_{sy}	f_{pu}	P	y_p	y_5
1	0,011929	0,012917	2,8801E+07	38129	2,1328E+08	626838	1975449	15300	0,175	0,743
2	0,011711	0,013371	3,2953E+07	34720	2,0072E+08	509783	1934533	13359	0,172	0,752
3	0,011537	0,013985	2,7097E+07	43513	2,2471E+08	592422	1909830	13316	0,167	0,771
4	0,011465	0,013157	2,8430E+07	34150	2,0820E+08	641286	1936668	14765	0,172	0,721
5	0,011717	0,013149	3,1363E+07	40198	2,0614E+08	576860	1979025	13545	0,171	0,770

6	0,011748	0,013164	3,4218E+07	39369	1,9294E+08	646434	1900420	14693	0,173	0,759
7	0,011742	0,012849	2,9645E+07	38500	2,1100E+08	639733	1932400	13110	0,169	0,764
8	0,011562	0,013222	3,2162E+07	35190	1,9437E+08	524241	1885050	14624	0,173	0,771
9	0,011329	0,01357	3,0367E+07	32522	2,1226E+08	604361	1872738	14404	0,173	0,747
10	0,012249	0,013297	3,3554E+07	35402	1,9121E+08	557640	1998439	14007	0,169	0,768
11	0,011817	0,013451	3,0047E+07	38805	1,9241E+08	610768	1938810	14209	0,171	0,774
12	0,011593	0,013208	3,0112E+07	38961	2,2687E+08	681759	1878229	16224	0,166	0,748
13	0,011699	0,013782	3,3671E+07	35972	1,8529E+08	598910	1918178	14865	0,166	0,749
14	0,011314	0,013665	3,3138E+07	45300	2,2106E+08	606178	1954497	13400	0,167	0,790
15	0,011896	0,013492	3,1490E+07	39810	1,9599E+08	599822	1962033	12476	0,168	0,759
16	0,011795	0,012818	2,7741E+07	31463	2,0016E+08	609842	1894233	16568	0,168	0,770
17	0,011768	0,01303	3,7188E+07	39041	2,0310E+08	580278	1943135	14491	0,174	0,764
18	0,011392	0,013229	3,5017E+07	40302	2,0768E+08	574446	2026622	13756	0,171	0,743
19	0,012021	0,013283	3,2021E+07	37100	2,0588E+08	587581	1841378	15030	0,174	0,766
20	0,012002	0,013443	2,8622E+07	37544	2,0232E+08	591471	1937738	15532	0,171	0,756
21	0,011605	0,013606	3,1112E+07	42738	1,9561E+08	550907	1952132	14447	0,173	0,749
22	0,011381	0,01327	2,5993E+07	36559	2,0538E+08	582447	1945331	15727	0,168	0,766
23	0,011803	0,013538	3,1426E+07	37249	2,0412E+08	566267	1969057	13783	0,170	0,754
24	0,011556	0,013459	3,2091E+07	33984	2,1193E+08	575668	1972145	14231	0,175	0,781
25	0,011344	0,013879	2,8223E+07	38056	1,9869E+08	553345	1875605	14535	0,173	0,775
26	0,011867	0,013421	2,8329E+07	35298	1,8313E+08	634103	1921560	14839	0,169	0,734
27	0,011969	0,013549	2,6361E+07	37836	2,2321E+08	650424	1977199	14469	0,166	0,737
28	0,011723	0,013141	2,5464E+07	36717	2,1656E+08	624628	1890801	14557	0,170	0,773
29	0,011736	0,01351	3,5673E+07	33805	2,1259E+08	564714	2043624	15654	0,171	0,741
30	0,011681	0,013051	3,1619E+07	36872	2,0984E+08	601639	1995262	14647	0,168	0,732
31	0,012044	0,01329	3,1952E+07	39628	1,7912E+08	597079	1861831	13271	0,167	0,740
32	0,011623	0,013378	2,4478E+07	37025	2,0742E+08	597996	1924865	15479	0,164	0,750
33	0,011357	0,013683	3,1884E+07	36231	1,8894E+08	617431	1973767	13511	0,172	0,753
34	0,011917	0,013559	2,8970E+07	36949	2,1293E+08	644624	1911073	14339	0,169	0,742
35	0,011277	0,012778	3,0303E+07	38883	2,0639E+08	596158	1987343	14274	0,172	0,756
36	0,01155	0,013317	3,2234E+07	33146	2,0513E+08	590513	1913503	14891	0,167	0,758
37	0,01153	0,013501	3,2382E+07	37175	2,1608E+08	571897	1907279	15384	0,172	0,745

38	0,011431	0,013392	3,0616E+07	37617	2,0487E+08	619418	1959434	13886	0,169	0,751
39	0,011254	0,012615	2,8713E+07	37691	2,1817E+08	555576	1882921	14717	0,169	0,768
40	0,011705	0,012967	3,0554E+07	35697	2,1041E+08	629140	1895855	14972	0,170	0,764
41	0,011488	0,013201	3,3044E+07	38651	1,9741E+08	668601	1946440	14253	0,170	0,755
42	0,011775	0,013099	2,9432E+07	40097	2,1131E+08	621455	1950971	12789	0,172	0,760
43	0,01144	0,013413	2,7995E+07	35790	2,1364E+08	589546	1970577	14382	0,170	0,782
44	0,011658	0,013263	3,2536E+07	37764	2,1401E+08	585571	1953307	14165	0,169	0,736
45	0,011575	0,013725	2,8528E+07	38351	1,9392E+08	586582	1963372	14296	0,174	0,767
46	0,011629	0,013399	2,6890E+07	39718	2,1162E+08	581372	1960721	15261	0,168	0,772
47	0,011569	0,013187	2,8886E+07	36060	2,1706E+08	607090	1915868	14318	0,172	0,753
48	0,011523	0,013041	2,9916E+07	36795	1,9183E+08	605269	1927036	13959	0,167	0,747
49	0,011473	0,013428	3,2865E+07	38425	2,0716E+08	632810	1982950	15000	0,161	0,761
50	0,011634	0,012875	3,1174E+07	34844	2,1479E+08	696217	1917029	14814	0,177	0,786
51	0,011517	0,013344	3,3925E+07	36146	2,0258E+08	588569	1933467	13046	0,172	0,766
52	0,011984	0,013619	2,9051E+07	42209	1,9838E+08	559566	2006169	13476	0,172	0,746
53	0,011941	0,013108	3,1554E+07	41991	2,0847E+08	545158	1850503	14121	0,171	0,762
54	0,011755	0,013133	3,4776E+07	37397	2,0928E+08	613578	2011148	13670	0,170	0,775
55	0,011729	0,012994	2,9208E+07	39903	1,9344E+08	642912	1989771	16040	0,168	0,739
56	0,011781	0,013116	3,2696E+07	41450	1,8979E+08	561376	1919315	15189	0,165	0,779
57	0,011693	0,012951	2,7448E+07	41149	2,0361E+08	567754	1992395	13221	0,175	0,777
58	0,011481	0,013125	3,4066E+07	30300	1,9807E+08	638246	1958170	13911	0,171	0,754
59	0,011227	0,013519	3,4569E+07	38203	1,9672E+08	578024	1929190	13578	0,168	0,744
60	0,011876	0,013436	3,0176E+07	32862	1,9774E+08	655093	1904628	15155	0,166	0,761
61	0,011422	0,01309	2,7600E+07	41616	2,0206E+08	548206	1964741	14187	0,165	0,765
62	0,012156	0,013256	2,9575E+07	34451	1,9707E+08	614529	1897423	15590	0,167	0,776
63	0,01164	0,013649	3,4384E+07	39454	2,0563E+08	616454	1980937	14670	0,169	0,778
64	0,011833	0,013475	2,9782E+07	37324	2,0180E+08	541632	2002023	13983	0,173	0,793
65	0,011142	0,013357	2,7282E+07	35503	2,0284E+08	620429	1940964	14030	0,170	0,762
66	0,011906	0,013081	3,6202E+07	37983	2,1759E+08	595232	1824376	14917	0,170	0,774
67	0,011687	0,013484	3,0926E+07	40410	1,9988E+08	573190	1903259	15224	0,179	0,799
68	0,011587	0,013071	3,0740E+07	35882	1,9636E+08	579162	1908566	13700	0,165	0,784
69	0,01181	0,01333	2,9130E+07	36639	2,3088E+08	570564	1912297	15911	0,166	0,788

70	0,011664	0,013062	2,9982E+07	35601	2,0956E+08	631554	1920442	14426	0,166	0,750
71	0,011646	0,013406	3,1684E+07	40636	2,0794E+08	664368	1925953	14513	0,165	0,752
72	0,011841	0,013593	3,3794E+07	40756	2,0044E+08	583504	1947558	12132	0,170	0,765
73	0,011049	0,013822	3,0864E+07	39540	2,0874E+08	611699	1923770	15122	0,170	0,757
74	0,012106	0,01335	3,2615E+07	34589	2,1946E+08	608921	1928115	13439	0,169	0,738
75	0,011788	0,01325	3,1817E+07	33391	2,0437E+08	615487	1949822	15341	0,174	0,758
76	0,011611	0,013215	2,9284E+07	41795	2,1071E+08	627976	1948685	15090	0,164	0,767
77	0,011412	0,012897	3,2780E+07	38575	1,9959E+08	635436	1905967	14053	0,174	0,769
78	0,011886	0,01331	3,1237E+07	39121	2,1439E+08	674000	1869561	12660	0,170	0,751
79	0,011581	0,013179	3,5305E+07	43078	2,0153E+08	532000	2017497	14789	0,177	0,777
80	0,01151	0,012721	2,6649E+07	39999	1,9929E+08	600731	1966143	13809	0,171	0,745
81	0,011402	0,013337	3,3337E+07	37909	2,1563E+08	569184	1887063	15059	0,167	0,759
82	0,011369	0,013703	2,8112E+07	32087	2,1879E+08	625722	1901857	13935	0,176	0,762
83	0,011849	0,013751	3,0240E+07	39285	1,8796E+08	648360	1865977	13728	0,169	0,746
84	0,011543	0,013303	3,3443E+07	40880	2,0336E+08	657794	1939885	13610	0,171	0,757
85	0,011192	0,013364	3,1750E+07	35079	2,0664E+08	593365	1967580	13861	0,170	0,770
86	0,011449	0,013243	2,9504E+07	41011	2,0386E+08	630332	1898943	14944	0,171	0,783
87	0,011617	0,012981	3,1050E+07	34964	2,0099E+08	602547	1955703	14076	0,172	0,727
88	0,012071	0,013633	2,7872E+07	38276	1,9480E+08	636816	1942047	13168	0,168	0,756
89	0,011496	0,013007	2,9359E+07	34305	2,0690E+08	623553	1931332	12890	0,163	0,758
90	0,011503	0,013194	3,0988E+07	36398	2,0126E+08	608004	1944230	13641	0,174	0,761
91	0,011296	0,013385	3,0429E+07	38728	1,8679E+08	652655	1856852	14361	0,175	0,780
92	0,011761	0,013323	2,9714E+07	42454	1,9900E+08	594301	1914693	15810	0,176	0,730
93	0,011825	0,013277	3,0678E+07	39202	1,9521E+08	563088	1922669	14143	0,168	0,760
94	0,011858	0,013529	3,3236E+07	36479	2,2021E+08	612635	1888975	14098	0,163	0,754
95	0,011954	0,013019	3,1299E+07	41295	2,1012E+08	660842	1956927	15429	0,173	0,750
96	0,011675	0,012935	2,9849E+07	33609	1,9054E+08	618419	1892551	14741	0,167	0,763
97	0,011669	0,013172	3,0802E+07	36315	2,2204E+08	584545	1930262	13835	0,168	0,773
98	0,011652	0,013236	3,2458E+07	40521	2,0901E+08	537399	1985079	14602	0,171	0,763
99	0,011457	0,013581	3,2307E+07	44137	2,1520E+08	622496	1935600	14579	0,169	0,755
100	0,011599	0,013467	3,0492E+07	37471	2,0462E+08	603453	1880657	12973	0,173	0,769

SECÇÃO CENTRAL, DETERIORADA, DO VÃO INTERMÉDIO.

Divisão dos domínios das variáveis relevantes.

i	A_p	E_c	E_s	f_c	f_{pu}	f_{sy}	P	y_p	y_s
1	0,007208	2,4478E+07	1,7912E+08	30300	1824376	509783	6932	0,161	0,721
2	0,007269	2,5464E+07	1,8313E+08	31463	1841378	524241	7129	0,163	0,727
3	0,007302	2,5993E+07	1,8529E+08	32087	1850503	532000	7234	0,163	0,730
4	0,007324	2,6361E+07	1,8679E+08	32522	1856852	537399	7308	0,164	0,732
5	0,007342	2,6649E+07	1,8796E+08	32862	1861831	541632	7365	0,164	0,734
6	0,007357	2,6890E+07	1,8894E+08	33146	1865977	545158	7413	0,165	0,736
7	0,00737	2,7097E+07	1,8979E+08	33391	1869561	548206	7455	0,165	0,737
8	0,007381	2,7282E+07	1,9054E+08	33609	1872738	550907	7492	0,165	0,738
9	0,007391	2,7448E+07	1,9121E+08	33805	1875605	553345	7525	0,165	0,739
10	0,007401	2,7600E+07	1,9183E+08	33984	1878229	555576	7555	0,166	0,740
11	0,007409	2,7741E+07	1,9241E+08	34150	1880657	557640	7583	0,166	0,741
12	0,007418	2,7872E+07	1,9294E+08	34305	1882921	559566	7609	0,166	0,742
13	0,007425	2,7995E+07	1,9344E+08	34451	1885050	561376	7634	0,166	0,743
14	0,007432	2,8112E+07	1,9392E+08	34589	1887063	563088	7657	0,166	0,743
15	0,007439	2,8223E+07	1,9437E+08	34720	1888975	564714	7679	0,166	0,744
16	0,007446	2,8329E+07	1,9480E+08	34844	1890801	566267	7700	0,167	0,745
17	0,007452	2,8430E+07	1,9521E+08	34964	1892551	567754	7721	0,167	0,745
18	0,007458	2,8528E+07	1,9561E+08	35079	1894233	569184	7740	0,167	0,746
19	0,007464	2,8622E+07	1,9599E+08	35190	1895855	570564	7759	0,167	0,746
20	0,007469	2,8713E+07	1,9636E+08	35298	1897423	571897	7777	0,167	0,747
21	0,007475	2,8801E+07	1,9672E+08	35402	1898943	573190	7795	0,167	0,747
22	0,00748	2,8886E+07	1,9707E+08	35503	1900420	574446	7812	0,167	0,748
23	0,007485	2,8970E+07	1,9741E+08	35601	1901857	575668	7828	0,167	0,749
24	0,00749	2,9051E+07	1,9774E+08	35697	1903259	576860	7845	0,168	0,749
25	0,007495	2,9130E+07	1,9807E+08	35790	1904628	578024	7860	0,168	0,750
26	0,0075	2,9208E+07	1,9838E+08	35882	1905967	579162	7876	0,168	0,750
27	0,007505	2,9284E+07	1,9869E+08	35972	1907279	580278	7891	0,168	0,750
28	0,007509	2,9359E+07	1,9900E+08	36060	1908566	581372	7906	0,168	0,751

29	0,007514	2,9432E+07	1,9929E+08	36146	1909830	582447	7921	0,168	0,751
30	0,007518	2,9504E+07	1,9959E+08	36231	1911073	583504	7935	0,168	0,752
31	0,007522	2,9575E+07	1,9988E+08	36315	1912297	584545	7949	0,168	0,752
32	0,007527	2,9645E+07	2,0016E+08	36398	1913503	585571	7963	0,168	0,753
33	0,007531	2,9714E+07	2,0044E+08	36479	1914693	586582	7977	0,168	0,753
34	0,007535	2,9782E+07	2,0072E+08	36559	1915868	587581	7990	0,169	0,754
35	0,007539	2,9849E+07	2,0099E+08	36639	1917029	588569	8004	0,169	0,754
36	0,007543	2,9916E+07	2,0126E+08	36717	1918178	589546	8017	0,169	0,754
37	0,007548	2,9982E+07	2,0153E+08	36795	1919315	590513	8030	0,169	0,755
38	0,007552	3,0047E+07	2,0180E+08	36872	1920442	591471	8043	0,169	0,755
39	0,007556	3,0112E+07	2,0206E+08	36949	1921560	592422	8056	0,169	0,756
40	0,00756	3,0176E+07	2,0232E+08	37025	1922669	593365	8069	0,169	0,756
41	0,007563	3,0240E+07	2,0258E+08	37100	1923770	594301	8082	0,169	0,756
42	0,007567	3,0303E+07	2,0284E+08	37175	1924865	595232	8094	0,169	0,757
43	0,007571	3,0367E+07	2,0310E+08	37249	1925953	596158	8107	0,169	0,757
44	0,007575	3,0429E+07	2,0336E+08	37324	1927036	597079	8119	0,169	0,758
45	0,007579	3,0492E+07	2,0361E+08	37397	1928115	597996	8132	0,170	0,758
46	0,007583	3,0554E+07	2,0386E+08	37471	1929190	598910	8144	0,170	0,758
47	0,007587	3,0616E+07	2,0412E+08	37544	1930262	599822	8157	0,170	0,759
48	0,00759	3,0678E+07	2,0437E+08	37617	1931332	600731	8169	0,170	0,759
49	0,007594	3,0740E+07	2,0462E+08	37691	1932400	601639	8181	0,170	0,759
50	0,007598	3,0802E+07	2,0487E+08	37764	1933467	602547	8194	0,170	0,760
51	0,007602	3,0864E+07	2,0513E+08	37836	1934533	603453	8206	0,170	0,760
52	0,007606	3,0926E+07	2,0538E+08	37909	1935600	604361	8219	0,170	0,761
53	0,00761	3,0988E+07	2,0563E+08	37983	1936668	605269	8231	0,170	0,761
54	0,007613	3,1050E+07	2,0588E+08	38056	1937738	606178	8243	0,170	0,761
55	0,007617	3,1112E+07	2,0614E+08	38129	1938810	607090	8256	0,170	0,762
56	0,007621	3,1174E+07	2,0639E+08	38203	1939885	608004	8268	0,170	0,762
57	0,007625	3,1237E+07	2,0664E+08	38276	1940964	608921	8281	0,171	0,762
58	0,007629	3,1299E+07	2,0690E+08	38351	1942047	609842	8293	0,171	0,763
59	0,007633	3,1363E+07	2,0716E+08	38425	1943135	610768	8306	0,171	0,763
60	0,007637	3,1426E+07	2,0742E+08	38500	1944230	611699	8318	0,171	0,764

61	0,00764	3,1490E+07	2,0768E+08	38575	1945331	612635	8331	0,171	0,764
62	0,007644	3,1554E+07	2,0794E+08	38651	1946440	613578	8344	0,171	0,764
63	0,007648	3,1619E+07	2,0820E+08	38728	1947558	614529	8357	0,171	0,765
64	0,007652	3,1684E+07	2,0847E+08	38805	1948685	615487	8370	0,171	0,765
65	0,007657	3,1750E+07	2,0874E+08	38883	1949822	616454	8383	0,171	0,766
66	0,007661	3,1817E+07	2,0901E+08	38961	1950971	617431	8396	0,171	0,766
67	0,007665	3,1884E+07	2,0928E+08	39041	1952132	618419	8410	0,171	0,766
68	0,007669	3,1952E+07	2,0956E+08	39121	1953307	619418	8423	0,172	0,767
69	0,007673	3,2021E+07	2,0984E+08	39202	1954497	620429	8437	0,172	0,767
70	0,007678	3,2091E+07	2,1012E+08	39285	1955703	621455	8451	0,172	0,768
71	0,007682	3,2162E+07	2,1041E+08	39369	1956927	622496	8465	0,172	0,768
72	0,007686	3,2234E+07	2,1071E+08	39454	1958170	623553	8479	0,172	0,769
73	0,007691	3,2307E+07	2,1100E+08	39540	1959434	624628	8494	0,172	0,769
74	0,007695	3,2382E+07	2,1131E+08	39628	1960721	625722	8509	0,172	0,770
75	0,0077	3,2458E+07	2,1162E+08	39718	1962033	626838	8524	0,172	0,770
76	0,007705	3,2536E+07	2,1193E+08	39810	1963372	627976	8540	0,172	0,770
77	0,00771	3,2615E+07	2,1226E+08	39903	1964741	629140	8555	0,172	0,771
78	0,007715	3,2696E+07	2,1259E+08	39999	1966143	630332	8572	0,173	0,771
79	0,00772	3,2780E+07	2,1293E+08	40097	1967580	631554	8588	0,173	0,772
80	0,007725	3,2865E+07	2,1328E+08	40198	1969057	632810	8605	0,173	0,773
81	0,007731	3,2953E+07	2,1364E+08	40302	1970577	634103	8623	0,173	0,773
82	0,007736	3,3044E+07	2,1401E+08	40410	1972145	635436	8641	0,173	0,774
83	0,007742	3,3138E+07	2,1439E+08	40521	1973767	636816	8660	0,173	0,774
84	0,007748	3,3236E+07	2,1479E+08	40636	1975449	638246	8679	0,173	0,775
85	0,007754	3,3337E+07	2,1520E+08	40756	1977199	639733	8700	0,173	0,775
86	0,007761	3,3443E+07	2,1563E+08	40880	1979025	641286	8721	0,174	0,776
87	0,007768	3,3554E+07	2,1608E+08	41011	1980937	642912	8743	0,174	0,777
88	0,007775	3,3671E+07	2,1656E+08	41149	1982950	644624	8766	0,174	0,777
89	0,007782	3,3794E+07	2,1706E+08	41295	1985079	646434	8791	0,174	0,778
90	0,007791	3,3925E+07	2,1759E+08	41450	1987343	648360	8817	0,174	0,779
91	0,007799	3,4066E+07	2,1817E+08	41616	1989771	650424	8845	0,174	0,780
92	0,007809	3,4218E+07	2,1879E+08	41795	1992395	652655	8875	0,175	0,781

93	0,007819	3,4384E+07	2,1946E+08	41991	1995262	655093	8908	0,175	0,782
94	0,00783	3,4569E+07	2,2021E+08	42209	1998439	657794	8945	0,175	0,783
95	0,007843	3,4776E+07	2,2106E+08	42454	2002023	660842	8987	0,175	0,784
96	0,007858	3,5017E+07	2,2204E+08	42738	2006169	664368	9035	0,176	0,786
97	0,007876	3,5305E+07	2,2321E+08	43078	2011148	668601	9092	0,176	0,788
98	0,007898	3,5673E+07	2,2471E+08	43513	2017497	674000	9166	0,177	0,790
99	0,007931	3,6202E+07	2,2687E+08	44137	2026622	681759	9271	0,177	0,793
100	0,007992	3,7188E+07	2,3088E+08	45300	2043624	696217	9468	0,179	0,799

Vectores de reordenação das variáveis anteriores.

<i>i</i>	Set-01	Set-02	Set-03	Set-04	Set-05	Set-06	Set-07	Set-08	Set-09
1	9	78	98	59	13	53	79	34	44
2	25	85	35	9	55	31	47	8	47
3	55	87	10	69	98	26	89	47	22
4	11	97	78	50	71	3	86	24	36
5	57	5	38	41	18	65	90	82	94
6	41	71	11	97	78	33	29	92	62
7	89	92	72	8	8	61	100	22	63
8	21	95	29	88	90	8	77	16	32
9	60	46	59	19	44	57	23	89	95
10	85	30	6	66	45	60	18	69	23
11	91	91	94	40	14	2	15	36	69
12	72	4	28	36	87	9	17	72	18
13	32	60	5	27	17	10	78	75	46
14	76	52	84	3	32	13	6	60	66
15	59	25	63	29	84	70	13	6	91
16	26	31	19	73	88	79	73	90	28
17	56	43	58	72	82	11	43	93	73
18	95	79	49	89	72	80	83	25	40
19	78	21	69	83	94	77	52	7	41
20	17	36	23	93	36	52	55	38	49
21	20	42	95	91	41	15	25	85	67

22	12	67	1	76	40	98	68	9	3
23	48	56	16	87	25	24	48	87	92
24	31	88	12	11	66	71	91	71	98
25	75	66	24	61	33	75	63	73	30
26	30	83	75	32	21	84	87	28	39
27	44	93	14	2	75	54	2	63	87
28	74	70	74	45	49	95	33	37	9
29	79	100	64	84	28	25	36	50	81
30	8	38	88	23	61	27	7	59	71
31	14	45	93	48	37	74	21	88	88
32	43	62	53	13	47	73	96	29	27
33	84	84	90	12	48	32	69	49	60
34	39	69	27	4	52	40	31	45	8
35	50	59	73	98	5	35	44	11	74
36	2	40	33	34	81	12	92	30	97
37	66	35	82	15	23	97	35	70	35
38	94	22	18	80	99	6	22	81	80
39	93	8	65	14	1	30	65	83	5
40	69	89	8	78	9	45	98	43	78
41	6	11	66	90	73	99	82	55	89
42	1	3	97	30	30	28	60	84	99
43	80	49	55	44	7	46	49	68	38
44	97	86	40	54	27	76	45	1	86
45	37	32	41	57	29	5	14	32	12
46	35	39	89	63	10	59	51	65	45
47	16	73	92	42	42	41	39	54	57
48	7	23	15	70	64	34	64	23	14
49	63	55	70	24	65	42	42	97	55
50	34	41	80	56	38	56	34	19	33
51	36	65	7	58	46	18	72	2	26
52	99	75	91	65	70	22	85	3	20
53	40	33	77	67	50	39	53	53	15

54	98	81	37	52	63	62	28	78	83
55	28	90	25	26	91	63	12	95	21
56	65	61	67	5	19	87	41	56	100
57	87	80	3	100	15	88	50	5	29
58	27	16	20	10	69	72	20	27	13
59	23	24	68	39	53	47	61	15	2
60	88	98	57	1	2	48	38	31	54
61	38	94	21	16	31	1	94	62	19
62	62	20	22	82	34	49	84	98	52
63	33	1	4	37	43	36	62	66	77
64	81	54	61	92	11	69	19	18	31
65	70	51	52	47	24	90	58	46	16
66	4	72	39	31	79	86	76	67	6
67	18	34	17	35	92	23	26	14	17
68	24	77	36	20	57	68	57	96	56
69	52	15	13	68	67	21	97	13	84
70	92	14	83	6	35	17	9	58	53
71	58	2	85	55	58	89	37	74	43
72	42	17	54	71	93	7	5	77	68
73	53	58	81	18	77	38	4	12	61
74	96	50	2	94	16	82	81	94	79
75	5	6	79	17	22	29	71	35	4
76	29	10	62	95	96	67	93	79	51
77	73	12	34	81	26	93	27	51	24
78	83	29	44	7	60	66	56	99	1
79	77	76	71	33	80	51	59	86	25
80	51	74	46	21	4	20	75	57	37
81	68	28	32	22	86	100	32	80	72
82	90	47	31	51	74	16	8	41	50
83	54	96	76	25	62	85	16	44	48
84	22	37	30	49	51	50	99	42	75
85	10	48	99	79	83	37	40	20	96

86	47	99	60	53	76	14	67	10	90
87	15	68	51	60	59	94	24	48	65
88	67	57	48	38	95	19	46	61	58
89	64	26	43	75	3	91	11	52	59
90	3	63	96	99	39	81	95	100	93
91	13	44	26	85	6	44	1	26	82
92	86	18	87	64	56	96	54	39	85
93	100	13	9	86	54	4	88	21	76
94	45	7	86	96	20	58	80	76	11
95	71	64	45	77	89	92	74	17	7
96	19	82	47	28	100	78	10	91	34
97	49	19	50	43	85	83	30	40	10
98	82	27	56	62	97	43	70	4	42
99	46	53	42	46	68	64	3	33	70
100	61	9	100	74	12	55	66	64	64

Variáveis reordenadas:

i	A_p	E_c	E_s	f_c	f_{pu}	f_{sy}	P	y_p	y_s
1	0,007391	3,2696E+04	2,2471E+08	38425	1885050	605269	8588	0,169	0,758
2	0,007495	3,3337E+04	2,0099E+08	33805	1938810	584545	8157	0,165	0,759
3	0,007617	3,3554E+04	1,9183E+08	39202	2017497	579162	8791	0,170	0,748
4	0,007409	3,5305E+04	2,1259E+08	37764	1956927	532000	8721	0,168	0,754
5	0,007625	2,6649E+04	2,0180E+08	37100	1894233	616454	8817	0,173	0,783
6	0,007563	3,2162E+04	1,9241E+08	43078	1966143	586582	7921	0,175	0,764
7	0,007782	3,4218E+04	2,1071E+08	33609	1872738	612635	9468	0,167	0,765
8	0,007475	3,4776E+04	1,9929E+08	41149	1987343	550907	8555	0,167	0,753
9	0,007637	3,0554E+04	2,0716E+08	35190	1927036	608921	7828	0,174	0,784
10	0,007754	2,9504E+04	1,8894E+08	38961	1928115	611699	7740	0,172	0,749
11	0,007799	3,4066E+04	2,2021E+08	37025	1887063	524241	7679	0,169	0,767
12	0,007686	2,6361E+04	1,9900E+08	36717	1980937	553345	7721	0,172	0,746
13	0,007527	3,1426E+04	1,8796E+08	35972	1892551	555576	8572	0,172	0,758
14	0,007705	3,0926E+04	2,1479E+08	32087	1913503	561376	7413	0,171	0,766

15	0,007633	2,9130E+04	2,0820E+08	36146	1975449	621455	7634	0,165	0,780
16	0,0075	2,9575E+04	1,9599E+08	39540	1982950	631554	8494	0,174	0,751
17	0,007621	3,0367E+04	2,0690E+08	39454	1972145	557640	8107	0,175	0,769
18	0,007843	3,2780E+04	2,0462E+08	41295	1958170	632810	8660	0,168	0,756
19	0,007715	2,8801E+04	2,0984E+08	40521	1998439	629140	8219	0,165	0,756
20	0,007452	2,9916E+04	1,9741E+08	41991	1918178	604361	8256	0,169	0,759
21	0,007469	3,0303E+04	2,2106E+08	41616	1923770	564714	7860	0,173	0,766
22	0,007418	3,1884E+04	1,7912E+08	39810	1922669	674000	8423	0,165	0,730
23	0,00759	3,1174E+04	1,9480E+08	41011	1904628	576860	8169	0,174	0,781
24	0,007522	3,3671E+04	1,9294E+08	34150	1950971	622496	8845	0,172	0,790
25	0,0077	3,1817E+04	1,9774E+08	38575	1914693	626838	8357	0,172	0,752
26	0,007518	3,3138E+04	2,1162E+08	36398	1898943	638246	8743	0,168	0,756
27	0,007575	3,4384E+04	1,9392E+08	31463	1962033	606178	7129	0,171	0,777
28	0,007695	3,2091E+04	2,1131E+08	37397	1932400	660842	7977	0,169	0,739
29	0,00772	3,7188E+04	2,0847E+08	40636	1908566	578024	8017	0,170	0,773
30	0,007381	3,0047E+04	2,1656E+08	35601	1945331	580278	7455	0,171	0,768
31	0,007432	3,0492E+04	2,1946E+08	37617	1919315	625722	7795	0,174	0,777
32	0,007571	3,1554E+04	2,0563E+08	34451	1930262	624628	9035	0,168	0,750
33	0,007748	3,3236E+04	2,1759E+08	34305	1931332	585571	8437	0,170	0,764
34	0,007556	3,2021E+04	1,9869E+08	32522	1935600	593365	7949	0,170	0,738
35	0,007598	3,1363E+04	2,1100E+08	43513	1861831	588569	8119	0,166	0,770
36	0,007269	3,0176E+04	2,0044E+08	36559	1970577	559566	8875	0,168	0,788
37	0,007661	2,9849E+04	2,1401E+08	34720	1901857	668601	8004	0,172	0,754
38	0,00783	2,8886E+04	1,9561E+08	40198	2026622	545158	7812	0,173	0,773
39	0,007819	2,7282E+04	2,0874E+08	34589	1824376	583504	8383	0,173	0,734
40	0,007673	3,3794E+04	1,9054E+08	39999	1875605	597996	9166	0,169	0,771
41	0,007357	2,7741E+04	2,0901E+08	41450	1959434	681759	8641	0,170	0,778
42	0,007208	2,5993E+04	2,2321E+08	36231	1911073	581372	8318	0,173	0,793
43	0,007725	3,0740E+04	2,0614E+08	37324	1869561	598910	8181	0,172	0,755
44	0,007876	3,3443E+04	2,0232E+08	38056	1907279	627976	8132	0,161	0,776
45	0,007548	2,9645E+04	2,0258E+08	38276	1909830	541632	7657	0,168	0,742
46	0,007539	3,0112E+04	2,1706E+08	38728	1878229	610768	8206	0,171	0,758

47	0,007446	3,2307E+04	2,1879E+08	37175	1924865	594301	8056	0,170	0,762
48	0,00737	2,8970E+04	1,9437E+08	39285	1948685	587581	8370	0,167	0,743
49	0,007648	3,1112E+04	2,1012E+08	35697	1949822	595232	8094	0,176	0,762
50	0,007535	3,0240E+04	2,1328E+08	38203	1920442	608004	7990	0,167	0,753
51	0,007543	3,1750E+04	1,8979E+08	38351	1929190	569184	8479	0,163	0,750
52	0,007931	3,2458E+04	2,1817E+08	38883	1955703	574446	8700	0,163	0,747
53	0,00756	2,9714E+04	2,1226E+08	39041	1933467	592422	8231	0,170	0,744
54	0,007898	3,2953E+04	2,0153E+08	37909	1947558	613578	7906	0,173	0,774
55	0,007509	3,3925E+04	1,9807E+08	35882	1989771	614529	7609	0,175	0,747
56	0,007657	3,1490E+04	2,0928E+08	32862	1895855	642912	8082	0,170	0,799
57	0,007768	3,2865E+04	1,8529E+08	45300	1888975	644624	8194	0,164	0,751
58	0,007505	2,8329E+04	1,9636E+08	33984	1954497	623553	7777	0,168	0,743
59	0,007485	2,9051E+04	2,0956E+08	36949	1936668	599822	8331	0,166	0,727
60	0,007775	3,5673E+04	2,0664E+08	30300	1841378	600731	8043	0,168	0,761
61	0,007552	3,4569E+04	1,9672E+08	34844	1912297	509783	8945	0,171	0,746
62	0,007644	2,8713E+04	1,9707E+08	40410	1915868	601639	8679	0,177	0,761
63	0,007531	2,4478E+04	1,8679E+08	36795	1925953	589546	8344	0,171	0,771
64	0,007731	3,1050E+04	2,0768E+08	41795	1880657	620429	7759	0,167	0,752
65	0,007678	3,0864E+04	2,0538E+08	37544	1903259	648360	8293	0,170	0,745
66	0,007324	3,2234E+04	2,0206E+08	36315	1967580	641286	8540	0,171	0,736
67	0,007458	2,9782E+04	1,9521E+08	36639	1992395	575668	7876	0,166	0,745
68	0,00749	3,2615E+04	2,0126E+08	35298	1940964	619418	8281	0,176	0,762
69	0,007606	2,8223E+04	1,9344E+08	39121	1952132	573190	9092	0,166	0,775
70	0,007809	2,8112E+04	2,1439E+08	33146	1917029	567754	7525	0,171	0,761
71	0,007629	2,5464E+04	2,1520E+08	38129	1942047	646434	8030	0,172	0,757
72	0,007567	2,8430E+04	2,0588E+08	39369	1995262	548206	7365	0,172	0,767
73	0,00761	3,1299E+04	2,1364E+08	35079	1964741	591471	7308	0,166	0,764
74	0,007858	3,0802E+04	1,8313E+08	42209	1890801	635436	8623	0,175	0,772
75	0,007342	2,6890E+04	2,1293E+08	34964	1900420	582447	8465	0,169	0,732
76	0,007514	2,7600E+04	2,0794E+08	42454	2006169	618419	8908	0,173	0,760
77	0,007691	2,7872E+04	2,0072E+08	40302	1905967	655093	7891	0,170	0,749
78	0,007742	2,9432E+04	2,0336E+08	33391	1944230	617431	8268	0,177	0,721

79	0,00771	3,2536E+04	2,1041E+08	36479	1969057	603453	8306	0,174	0,750
80	0,007602	3,2382E+04	2,0386E+08	35402	1856852	571897	8524	0,171	0,755
81	0,007669	2,9359E+04	2,0016E+08	35503	1979025	696217	7963	0,173	0,769
82	0,007791	3,0616E+04	1,9988E+08	37836	1960721	566267	7492	0,169	0,760
83	0,007613	3,5017E+04	2,1193E+08	35790	1946440	639733	7700	0,169	0,759
84	0,00748	2,9982E+04	1,9959E+08	37691	1934533	602547	9271	0,169	0,770
85	0,007401	3,0678E+04	2,2687E+08	40097	1973767	590513	8069	0,167	0,786
86	0,007587	3,6202E+04	2,0742E+08	37983	1963372	563088	8410	0,166	0,779
87	0,007439	3,1952E+04	2,0513E+08	38500	1943135	657794	7845	0,170	0,766
88	0,007665	3,1237E+04	2,0437E+08	36872	2002023	570564	8144	0,171	0,763
89	0,007652	2,9208E+04	2,0310E+08	39718	1850503	650424	7583	0,170	0,763
90	0,007302	3,1619E+04	2,2204E+08	44137	1921560	634103	8987	0,179	0,782
91	0,007425	3,0429E+04	1,9838E+08	40756	1865977	597079	6932	0,168	0,774
92	0,007761	2,8528E+04	2,1608E+08	38805	1939885	664368	8243	0,169	0,775
93	0,007992	2,7995E+04	1,9121E+08	40880	1937738	537399	8766	0,167	0,770
94	0,007579	2,7097E+04	2,1563E+08	42738	1897423	609842	8605	0,172	0,741
95	0,007682	3,1684E+04	2,0361E+08	39903	1985079	652655	8509	0,167	0,737
96	0,007464	3,3044E+04	2,0412E+08	36060	2043624	630332	7555	0,174	0,754
97	0,007594	2,8622E+04	2,0487E+08	37249	1977199	636816	7935	0,169	0,740
98	0,007736	2,9284E+04	2,0639E+08	38651	2011148	596158	8451	0,164	0,757
99	0,007583	3,0988E+04	2,0284E+08	37471	1953307	615487	7234	0,168	0,768
100	0,00764	2,7448E+04	2,3088E+08	39628	1882921	607090	8396	0,171	0,765

SECÇÃO, INTACTA, SOBRE O PILAR P1.

Divisão dos domínios das variáveis relevantes.

i	A_p	A_s	E_c	E_s	f_c	f_{pu}	f_{sy}	P	y_p	y_s
1	0,012615	0,014291	2,4478E+07	1,7912E+08	30300	1824376	509783	12132	0,617	0,721
2	0,012721	0,014411	2,5464E+07	1,8313E+08	31463	1841378	524241	12476	0,622	0,727
3	0,012778	0,014476	2,5993E+07	1,8529E+08	32087	1850503	532000	12660	0,624	0,730
4	0,012818	0,014521	2,6361E+07	1,8679E+08	32522	1856852	537399	12789	0,626	0,732
5	0,012849	0,014556	2,6649E+07	1,8796E+08	32862	1861831	541632	12890	0,628	0,734
6	0,012875	0,014585	2,6890E+07	1,8894E+08	33146	1865977	545158	12973	0,629	0,736

7	0,012897	0,014611	2,7097E+07	1,8979E+08	33391	1869561	548206	13046	0,630	0,737
8	0,012917	0,014633	2,7282E+07	1,9054E+08	33609	1872738	550907	13110	0,631	0,738
9	0,012935	0,014654	2,7448E+07	1,9121E+08	33805	1875605	553345	13168	0,632	0,739
10	0,012951	0,014672	2,7600E+07	1,9183E+08	33984	1878229	555576	13221	0,633	0,740
11	0,012967	0,014689	2,7741E+07	1,9241E+08	34150	1880657	557640	13271	0,634	0,741
12	0,012981	0,014705	2,7872E+07	1,9294E+08	34305	1882921	559566	13316	0,634	0,742
13	0,012994	0,01472	2,7995E+07	1,9344E+08	34451	1885050	561376	13359	0,635	0,743
14	0,013007	0,014735	2,8112E+07	1,9392E+08	34589	1887063	563088	13400	0,636	0,743
15	0,013019	0,014748	2,8223E+07	1,9437E+08	34720	1888975	564714	13439	0,636	0,744
16	0,01303	0,014761	2,8329E+07	1,9480E+08	34844	1890801	566267	13476	0,637	0,745
17	0,013041	0,014774	2,8430E+07	1,9521E+08	34964	1892551	567754	13511	0,637	0,745
18	0,013051	0,014785	2,8528E+07	1,9561E+08	35079	1894233	569184	13545	0,638	0,746
19	0,013062	0,014797	2,8622E+07	1,9599E+08	35190	1895855	570564	13578	0,638	0,746
20	0,013071	0,014808	2,8713E+07	1,9636E+08	35298	1897423	571897	13610	0,639	0,747
21	0,013081	0,014819	2,8801E+07	1,9672E+08	35402	1898943	573190	13641	0,639	0,747
22	0,01309	0,014829	2,8886E+07	1,9707E+08	35503	1900420	574446	13670	0,640	0,748
23	0,013099	0,014839	2,8970E+07	1,9741E+08	35601	1901857	575668	13700	0,640	0,749
24	0,013108	0,014849	2,9051E+07	1,9774E+08	35697	1903259	576860	13728	0,641	0,749
25	0,013116	0,014859	2,9130E+07	1,9807E+08	35790	1904628	578024	13756	0,641	0,750
26	0,013125	0,014869	2,9208E+07	1,9838E+08	35882	1905967	579162	13783	0,641	0,750
27	0,013133	0,014878	2,9284E+07	1,9869E+08	35972	1907279	580278	13809	0,642	0,750
28	0,013141	0,014887	2,9359E+07	1,9900E+08	36060	1908566	581372	13835	0,642	0,751
29	0,013149	0,014896	2,9432E+07	1,9929E+08	36146	1909830	582447	13861	0,643	0,751
30	0,013157	0,014905	2,9504E+07	1,9959E+08	36231	1911073	583504	13886	0,643	0,752
31	0,013164	0,014913	2,9575E+07	1,9988E+08	36315	1912297	584545	13911	0,643	0,752
32	0,013172	0,014922	2,9645E+07	2,0016E+08	36398	1913503	585571	13935	0,644	0,753
33	0,013179	0,01493	2,9714E+07	2,0044E+08	36479	1914693	586582	13959	0,644	0,753
34	0,013187	0,014939	2,9782E+07	2,0072E+08	36559	1915868	587581	13983	0,644	0,754
35	0,013194	0,014947	2,9849E+07	2,0099E+08	36639	1917029	588569	14007	0,645	0,754
36	0,013201	0,014955	2,9916E+07	2,0126E+08	36717	1918178	589546	14030	0,645	0,754
37	0,013208	0,014963	2,9982E+07	2,0153E+08	36795	1919315	590513	14053	0,646	0,755
38	0,013215	0,014971	3,0047E+07	2,0180E+08	36872	1920442	591471	14076	0,646	0,755

39	0,013222	0,014979	3,0112E+07	2,0206E+08	36949	1921560	592422	14098	0,646	0,756
40	0,013229	0,014987	3,0176E+07	2,0232E+08	37025	1922669	593365	14121	0,647	0,756
41	0,013236	0,014995	3,0240E+07	2,0258E+08	37100	1923770	594301	14143	0,647	0,756
42	0,013243	0,015002	3,0303E+07	2,0284E+08	37175	1924865	595232	14165	0,647	0,757
43	0,01325	0,01501	3,0367E+07	2,0310E+08	37249	1925953	596158	14187	0,648	0,757
44	0,013256	0,015018	3,0429E+07	2,0336E+08	37324	1927036	597079	14209	0,648	0,758
45	0,013263	0,015025	3,0492E+07	2,0361E+08	37397	1928115	597996	14231	0,648	0,758
46	0,01327	0,015033	3,0554E+07	2,0386E+08	37471	1929190	598910	14253	0,649	0,758
47	0,013277	0,015041	3,0616E+07	2,0412E+08	37544	1930262	599822	14274	0,649	0,759
48	0,013283	0,015048	3,0678E+07	2,0437E+08	37617	1931332	600731	14296	0,649	0,759
49	0,01329	0,015056	3,0740E+07	2,0462E+08	37691	1932400	601639	14318	0,650	0,759
50	0,013297	0,015063	3,0802E+07	2,0487E+08	37764	1933467	602547	14339	0,650	0,760
51	0,013303	0,015071	3,0864E+07	2,0513E+08	37836	1934533	603453	14361	0,650	0,760
52	0,01331	0,015078	3,0926E+07	2,0538E+08	37909	1935600	604361	14382	0,650	0,761
53	0,013317	0,015086	3,0988E+07	2,0563E+08	37983	1936668	605269	14404	0,651	0,761
54	0,013323	0,015094	3,1050E+07	2,0588E+08	38056	1937738	606178	14426	0,651	0,761
55	0,01333	0,015101	3,1112E+07	2,0614E+08	38129	1938810	607090	14447	0,651	0,762
56	0,013337	0,015109	3,1174E+07	2,0639E+08	38203	1939885	608004	14469	0,652	0,762
57	0,013344	0,015116	3,1237E+07	2,0664E+08	38276	1940964	608921	14491	0,652	0,762
58	0,01335	0,015124	3,1299E+07	2,0690E+08	38351	1942047	609842	14513	0,652	0,763
59	0,013357	0,015132	3,1363E+07	2,0716E+08	38425	1943135	610768	14535	0,653	0,763
60	0,013364	0,01514	3,1426E+07	2,0742E+08	38500	1944230	611699	14557	0,653	0,764
61	0,013371	0,015147	3,1490E+07	2,0768E+08	38575	1945331	612635	14579	0,653	0,764
62	0,013378	0,015155	3,1554E+07	2,0794E+08	38651	1946440	613578	14602	0,654	0,764
63	0,013385	0,015163	3,1619E+07	2,0820E+08	38728	1947558	614529	14624	0,654	0,765
64	0,013392	0,015171	3,1684E+07	2,0847E+08	38805	1948685	615487	14647	0,654	0,765
65	0,013399	0,015179	3,1750E+07	2,0874E+08	38883	1949822	616454	14670	0,655	0,766
66	0,013406	0,015187	3,1817E+07	2,0901E+08	38961	1950971	617431	14693	0,655	0,766
67	0,013413	0,015195	3,1884E+07	2,0928E+08	39041	1952132	618419	14717	0,656	0,766
68	0,013421	0,015204	3,1952E+07	2,0956E+08	39121	1953307	619418	14741	0,656	0,767
69	0,013428	0,015212	3,2021E+07	2,0984E+08	39202	1954497	620429	14765	0,656	0,767
70	0,013436	0,015221	3,2091E+07	2,1012E+08	39285	1955703	621455	14789	0,657	0,768

71	0,013443	0,015229	3,2162E+07	2,1041E+08	39369	1956927	622496	14814	0,657	0,768
72	0,013451	0,015238	3,2234E+07	2,1071E+08	39454	1958170	623553	14839	0,657	0,769
73	0,013459	0,015247	3,2307E+07	2,1100E+08	39540	1959434	624628	14865	0,658	0,769
74	0,013467	0,015256	3,2382E+07	2,1131E+08	39628	1960721	625722	14891	0,658	0,770
75	0,013475	0,015266	3,2458E+07	2,1162E+08	39718	1962033	626838	14917	0,659	0,770
76	0,013484	0,015275	3,2536E+07	2,1193E+08	39810	1963372	627976	14944	0,659	0,770
77	0,013492	0,015285	3,2615E+07	2,1226E+08	39903	1964741	629140	14972	0,659	0,771
78	0,013501	0,015295	3,2696E+07	2,1259E+08	39999	1966143	630332	15000	0,660	0,771
79	0,01351	0,015305	3,2780E+07	2,1293E+08	40097	1967580	631554	15030	0,660	0,772
80	0,013519	0,015315	3,2865E+07	2,1328E+08	40198	1969057	632810	15059	0,661	0,773
81	0,013529	0,015326	3,2953E+07	2,1364E+08	40302	1970577	634103	15090	0,661	0,773
82	0,013538	0,015337	3,3044E+07	2,1401E+08	40410	1972145	635436	15122	0,662	0,774
83	0,013549	0,015349	3,3138E+07	2,1439E+08	40521	1973767	636816	15155	0,662	0,774
84	0,013559	0,015361	3,3236E+07	2,1479E+08	40636	1975449	638246	15189	0,663	0,775
85	0,01357	0,015373	3,3337E+07	2,1520E+08	40756	1977199	639733	15224	0,663	0,775
86	0,013581	0,015386	3,3443E+07	2,1563E+08	40880	1979025	641286	15261	0,664	0,776
87	0,013593	0,0154	3,3554E+07	2,1608E+08	41011	1980937	642912	15300	0,664	0,777
88	0,013606	0,015414	3,3671E+07	2,1656E+08	41149	1982950	644624	15341	0,665	0,777
89	0,013619	0,015429	3,3794E+07	2,1706E+08	41295	1985079	646434	15384	0,666	0,778
90	0,013633	0,015445	3,3925E+07	2,1759E+08	41450	1987343	648360	15429	0,666	0,779
91	0,013649	0,015462	3,4066E+07	2,1817E+08	41616	1989771	650424	15479	0,667	0,780
92	0,013665	0,015481	3,4218E+07	2,1879E+08	41795	1992395	652655	15532	0,668	0,781
93	0,013683	0,015501	3,4384E+07	2,1946E+08	41991	1995262	655093	15590	0,669	0,782
94	0,013703	0,015523	3,4569E+07	2,2021E+08	42209	1998439	657794	15654	0,670	0,783
95	0,013725	0,015549	3,4776E+07	2,2106E+08	42454	2002023	660842	15727	0,671	0,784
96	0,013751	0,015578	3,5017E+07	2,2204E+08	42738	2006169	664368	15810	0,672	0,786
97	0,013782	0,015613	3,5305E+07	2,2321E+08	43078	2011148	668601	15911	0,674	0,788
98	0,013822	0,015658	3,5673E+07	2,2471E+08	43513	2017497	674000	16040	0,676	0,790
99	0,013879	0,015723	3,6202E+07	2,2687E+08	44137	2026622	681759	16224	0,678	0,793
100	0,013985	0,015843	3,7188E+07	2,3088E+08	45300	2043624	696217	16568	0,683	0,799

Vectoros de reordenação das variáveis anteriores.

<i>i</i>	Set-01	Set-02	Set-03	Set-04	Set-05	Set-06	Set-07	Set-08	Set-09	Set-10
1	74	50	46	2	74	32	74	80	35	36
2	31	78	61	37	69	27	75	54	34	68
3	17	56	67	30	72	81	83	88	43	96
4	37	51	56	55	60	88	13	2	75	49
5	81	83	24	97	61	67	66	76	30	7
6	100	32	84	61	8	87	47	89	78	31
7	18	63	70	27	48	47	82	49	54	50
8	76	49	32	62	38	12	64	37	57	53
9	64	33	64	36	54	31	6	72	25	21
10	71	60	42	79	52	62	89	3	26	61
11	80	68	71	95	86	99	94	61	58	12
12	62	16	35	49	90	91	23	47	80	62
13	44	67	44	86	97	28	98	33	49	77
14	34	44	89	80	75	6	45	28	100	76
15	57	53	59	75	46	48	21	35	20	98
16	43	93	14	20	91	92	10	31	63	55
17	68	76	60	7	28	68	57	9	61	3
18	20	24	87	40	89	39	63	40	1	9
19	8	91	81	44	36	26	48	83	66	60
20	35	90	54	50	96	43	59	86	56	54
21	19	82	17	42	56	69	41	67	83	6
22	60	46	100	59	30	86	46	48	87	28
23	47	66	85	13	92	65	85	100	52	10
24	92	1	26	57	84	84	95	65	97	82
25	90	3	68	100	100	79	51	58	45	14
26	85	47	34	64	1	1	12	69	10	59
27	45	37	27	72	41	53	61	14	19	44
28	16	40	96	22	32	9	4	74	42	22
29	12	10	73	66	9	17	37	27	8	73
30	39	36	55	93	68	64	93	39	2	18

31	13	48	38	84	83	42	86	63	82	70
32	94	25	76	24	2	3	18	32	89	2
33	96	5	45	81	49	76	3	38	22	87
34	51	55	28	19	17	60	79	73	93	63
35	11	98	91	32	59	15	32	20	48	97
36	6	29	94	26	98	66	14	5	70	43
37	5	8	92	45	82	95	58	21	39	52
38	53	4	37	11	37	93	72	18	21	72
39	38	80	8	6	95	52	62	29	38	69
40	61	27	36	76	93	46	38	99	16	47
41	23	77	11	1	51	58	2	93	79	34
42	50	21	52	17	88	20	71	91	11	30
43	69	20	58	43	27	72	54	34	15	92
44	88	38	95	99	50	7	96	75	40	81
45	28	31	43	48	85	21	31	10	37	100
46	72	39	98	90	31	38	39	56	64	85
47	83	9	21	91	66	34	24	23	28	40
48	66	35	50	68	47	24	19	7	62	66
49	86	73	88	87	64	10	69	19	51	26
50	41	71	69	69	40	74	22	11	4	39
51	42	74	48	47	44	73	34	70	36	45
52	48	96	80	23	25	78	29	52	68	8
53	78	59	2	56	4	61	73	45	69	78
54	14	19	5	58	87	77	88	8	65	99
55	32	18	13	70	53	100	44	98	99	74
56	79	65	6	92	43	11	97	13	7	27
57	1	69	75	14	26	14	81	36	98	58
58	25	97	25	74	35	4	92	26	55	41
59	77	84	31	88	21	37	67	55	14	15
60	29	12	83	21	57	50	16	82	47	46
61	82	22	47	29	62	75	65	64	77	79
62	52	52	7	65	45	83	70	59	76	88

63	55	54	29	73	20	57	80	68	44	67
64	56	15	93	82	33	35	1	50	32	17
65	2	26	22	89	24	5	33	78	18	23
66	93	85	33	9	16	30	17	62	53	93
67	97	99	12	77	79	19	55	97	74	13
68	30	95	97	39	12	16	40	12	59	38
69	10	88	49	78	81	94	78	77	81	80
70	89	70	66	67	42	82	53	79	60	65
71	49	17	74	96	65	54	36	17	50	48
72	99	64	78	10	34	36	99	22	41	35
73	24	2	53	83	23	40	7	42	23	24
74	21	43	72	41	6	33	87	66	96	75
75	4	75	57	54	7	44	20	43	24	29
76	7	100	10	16	10	63	26	95	84	91
77	59	86	90	71	94	96	100	16	67	20
78	65	41	63	38	39	41	11	41	46	83
79	15	57	23	31	99	49	77	44	12	94
80	3	61	30	51	58	71	43	1	90	32
81	33	13	20	4	19	89	42	15	9	33
82	75	94	79	33	71	97	68	94	71	56
83	91	14	1	46	29	70	52	81	73	89
84	26	87	51	52	14	45	84	24	72	64
85	95	72	62	18	76	29	5	46	13	95
86	73	34	19	3	3	13	27	87	5	1
87	87	11	9	35	22	90	90	84	86	71
88	9	45	65	5	77	23	60	57	29	51
89	98	89	15	63	80	56	28	85	31	11
90	58	30	41	98	18	55	35	30	17	25
91	27	23	4	12	67	51	76	53	27	84
92	63	7	18	34	78	59	25	71	6	86
93	84	6	16	15	11	25	49	6	95	57
94	54	62	99	94	13	2	30	51	91	4

95	22	42	86	60	63	80	15	96	33	16
96	46	58	77	85	70	18	8	25	88	37
97	40	28	3	53	15	22	91	90	85	42
98	67	92	39	28	73	8	9	60	92	19
99	70	81	40	8	55	85	56	92	3	5
100	36	79	82	25	5	98	50	4	94	90

Variáveis reordenadas:

i	A_p	A_s	E_c	E_s	f_c	f_{pu}	f_{sy}	P	y_p	y_s
1	0,013467	0,015063	3,0554E+07	2,1328E+08	39628	1913503	625722	15059	0,645	0,754
2	0,013164	0,015295	3,1490E+07	2,0072E+08	39202	1907279	626838	14426	0,644	0,767
3	0,013041	0,015109	3,1884E+07	2,2471E+08	39454	1970577	636816	15341	0,648	0,786
4	0,013208	0,015071	3,1174E+07	2,0820E+08	38500	1982950	561376	12476	0,659	0,759
5	0,013529	0,015349	2,9051E+07	2,0614E+08	38575	1952132	617431	14944	0,643	0,737
6	0,013985	0,014922	3,3236E+07	1,9294E+08	33609	1980937	599822	15384	0,660	0,752
7	0,013051	0,015163	3,2091E+07	2,1100E+08	37617	1930262	635436	14318	0,651	0,760
8	0,013484	0,015056	2,9645E+07	1,9437E+08	36872	1882921	615487	14053	0,652	0,761
9	0,013392	0,01493	3,1684E+07	2,1226E+08	38056	1912297	545158	14839	0,641	0,747
10	0,013443	0,01514	3,0303E+07	1,9121E+08	37909	1946440	646434	12660	0,641	0,764
11	0,013519	0,015204	3,2162E+07	1,9241E+08	40880	2026622	657794	14579	0,652	0,742
12	0,013378	0,014761	2,9849E+07	2,2687E+08	41450	1989771	575668	14274	0,661	0,764
13	0,013256	0,015195	3,0429E+07	1,8529E+08	43078	1908566	674000	13959	0,650	0,771
14	0,013187	0,015018	3,3794E+07	2,2106E+08	39718	1865977	597996	13835	0,683	0,770
15	0,013344	0,015086	3,1363E+07	1,9599E+08	37471	1931332	573190	14007	0,639	0,790
16	0,01325	0,015501	2,8112E+07	2,0016E+08	41616	1992395	555576	13911	0,654	0,762
17	0,013421	0,015275	3,1426E+07	2,0310E+08	36060	1953307	608921	13168	0,653	0,730
18	0,013071	0,014849	3,3554E+07	2,0768E+08	41295	1921560	614529	14121	0,617	0,739
19	0,012917	0,015462	3,2953E+07	2,0588E+08	36717	1905967	600731	15155	0,655	0,764
20	0,013194	0,015445	3,1050E+07	2,0232E+08	42738	1925953	610768	15261	0,652	0,761
21	0,013062	0,015337	2,8430E+07	1,9561E+08	38203	1954497	594301	14717	0,662	0,736
22	0,013364	0,015033	3,7188E+07	2,0538E+08	36231	1979025	598910	14296	0,664	0,751
23	0,013277	0,015187	3,3337E+07	2,0412E+08	41795	1949822	639733	16568	0,650	0,740

24	0,013665	0,014291	2,9208E+07	2,1193E+08	40636	1975449	660842	14670	0,674	0,774
25	0,013633	0,014476	3,1952E+07	1,9869E+08	45300	1967580	603453	14513	0,648	0,743
26	0,01357	0,015041	2,9782E+07	1,8313E+08	30300	1824376	559566	14765	0,633	0,763
27	0,013263	0,014963	2,9284E+07	2,2321E+08	37100	1936668	612635	13400	0,638	0,758
28	0,01303	0,014987	3,5017E+07	2,1656E+08	36398	1875605	537399	14891	0,647	0,748
29	0,012981	0,014672	3,2307E+07	2,1259E+08	33805	1892551	590513	13809	0,631	0,769
30	0,013222	0,014955	3,1112E+07	2,0984E+08	39121	1948685	655093	14098	0,622	0,746
31	0,012994	0,015048	3,0047E+07	1,7912E+08	40521	1924865	641286	14624	0,662	0,768
32	0,013703	0,014859	3,2536E+07	2,0742E+08	31463	1850503	569184	13935	0,666	0,727
33	0,013751	0,014556	3,0492E+07	1,8894E+08	37691	1963372	532000	14076	0,640	0,777
34	0,013303	0,015101	2,9359E+07	2,1293E+08	34964	1944230	631554	14865	0,669	0,765
35	0,012967	0,015658	3,4066E+07	2,0639E+08	38425	1888975	585571	13610	0,649	0,788
36	0,012875	0,014896	3,4569E+07	2,0513E+08	43513	1950971	563088	12890	0,657	0,757
37	0,012849	0,014633	3,4218E+07	2,1608E+08	40410	2002023	609842	13641	0,646	0,761
38	0,013317	0,014521	2,9982E+07	2,0487E+08	36795	1995262	623553	13545	0,639	0,769
39	0,013215	0,015315	2,7282E+07	2,1817E+08	42454	1935600	613578	13861	0,646	0,767
40	0,013371	0,014878	2,9916E+07	2,1041E+08	41991	1929190	591471	16224	0,637	0,759
41	0,013099	0,015285	2,7741E+07	1,9741E+08	37836	1942047	524241	15590	0,660	0,754
42	0,013297	0,014819	3,0926E+07	2,1131E+08	41149	1897423	622496	15479	0,634	0,752
43	0,013428	0,014808	3,1299E+07	2,1364E+08	35972	1958170	606178	13983	0,636	0,781
44	0,013606	0,014971	3,4776E+07	2,1401E+08	37764	1869561	664368	14917	0,647	0,773
45	0,013141	0,014913	3,0367E+07	1,9392E+08	40756	1898943	584545	13221	0,646	0,799
46	0,013451	0,014979	3,5673E+07	2,1162E+08	36315	1920442	592422	14469	0,654	0,775
47	0,013549	0,014654	2,8801E+07	2,1706E+08	38961	1915868	576860	13700	0,642	0,756
48	0,013406	0,014947	3,0802E+07	1,9183E+08	37544	1903259	570564	13046	0,654	0,766
49	0,013581	0,015247	3,3671E+07	2,0716E+08	38805	1878229	620429	13578	0,650	0,750
50	0,013236	0,015229	3,2021E+07	2,1479E+08	37025	1960721	574446	13271	0,626	0,756
51	0,013243	0,015256	3,0678E+07	2,0258E+08	37324	1959434	587581	14789	0,645	0,758
52	0,013283	0,015578	3,2865E+07	1,9838E+08	35790	1966143	582447	14382	0,656	0,738
53	0,013501	0,015132	2,5464E+07	2,0847E+08	32522	1945331	624628	14231	0,656	0,771
54	0,013007	0,014797	2,6649E+07	2,0928E+08	41011	1964741	644624	13110	0,655	0,793
55	0,013172	0,014785	2,7995E+07	1,9344E+08	37983	2043624	597079	16040	0,678	0,770

56	0,01351	0,015179	2,6890E+07	1,8979E+08	37249	1880657	668601	13359	0,630	0,750
57	0,012615	0,015212	3,2458E+07	2,0361E+08	35882	1887063	634103	14030	0,676	0,763
58	0,013116	0,015613	2,9130E+07	1,9807E+08	36639	1856852	652655	13783	0,651	0,756
59	0,013492	0,015361	2,9575E+07	1,9672E+08	35402	1919315	618419	14447	0,636	0,744
60	0,013149	0,014705	3,3138E+07	1,9774E+08	38276	1933467	566267	15122	0,649	0,758
61	0,013538	0,014829	3,0616E+07	2,0206E+08	38651	1962033	616454	14647	0,659	0,772
62	0,01331	0,015078	2,7097E+07	1,9707E+08	37397	1973767	621455	14535	0,659	0,777
63	0,01333	0,015094	2,9432E+07	2,0563E+08	35298	1940964	632810	14741	0,648	0,766
64	0,013337	0,014748	3,4384E+07	2,0180E+08	36479	1917029	509783	14339	0,644	0,745
65	0,012721	0,014869	2,8886E+07	2,0284E+08	35697	1861831	586582	15000	0,638	0,749
66	0,013683	0,015373	2,9714E+07	2,1759E+08	34844	1911073	567754	14602	0,651	0,782
67	0,013782	0,015723	2,7872E+07	1,9988E+08	40097	1895855	607090	15911	0,658	0,743
68	0,013157	0,015549	3,5305E+07	1,9636E+08	34305	1890801	593365	13316	0,653	0,755
69	0,012951	0,015414	3,0740E+07	2,3088E+08	40302	1998439	630332	14972	0,661	0,773
70	0,013619	0,015221	3,1817E+07	2,0956E+08	37175	1972145	605269	15030	0,653	0,766
71	0,01329	0,014774	3,2382E+07	2,0794E+08	38883	1937738	589546	13511	0,650	0,759
72	0,013879	0,015171	3,2696E+07	2,0044E+08	36559	1918178	681759	13670	0,647	0,754
73	0,013108	0,014411	3,0988E+07	2,0874E+08	35601	1922669	548206	14165	0,640	0,749
74	0,013081	0,01501	3,2234E+07	2,1946E+08	33146	1914693	642912	14693	0,672	0,770
75	0,012818	0,015266	3,1237E+07	2,0437E+08	33391	1927036	571897	14187	0,641	0,751
76	0,012897	0,015843	2,7600E+07	2,1071E+08	33984	1947558	579162	15727	0,663	0,780
77	0,013357	0,015386	3,3925E+07	1,9959E+08	42209	2006169	696217	13476	0,656	0,747
78	0,013399	0,014995	3,1619E+07	2,1439E+08	36949	1923770	557640	14143	0,649	0,774
79	0,013019	0,015116	2,8970E+07	2,0153E+08	44137	1932400	629140	14209	0,634	0,783
80	0,012778	0,015147	2,9504E+07	1,9929E+08	38351	1956927	596158	12132	0,666	0,753
81	0,013179	0,01472	2,8713E+07	2,1563E+08	35190	1985079	595232	13439	0,632	0,753
82	0,013475	0,015523	3,2780E+07	2,1879E+08	39369	2011148	619418	15654	0,657	0,762
83	0,013649	0,014735	2,4478E+07	1,8796E+08	36146	1955703	604361	15090	0,658	0,778
84	0,013125	0,0154	3,0864E+07	2,0336E+08	34589	1928115	638246	13728	0,657	0,765
85	0,013725	0,015238	3,1554E+07	2,0664E+08	39810	1909830	541632	14253	0,635	0,784
86	0,013459	0,014939	2,8622E+07	2,0386E+08	32087	1885050	580278	15300	0,628	0,721
87	0,013593	0,014689	2,7448E+07	2,0099E+08	35503	1987343	648360	15189	0,664	0,768

88	0,012935	0,015025	3,1750E+07	1,9480E+08	39903	1901857	611699	14491	0,643	0,760
89	0,013822	0,015429	2,8223E+07	2,0690E+08	40198	1939885	581372	15224	0,643	0,741
90	0,01335	0,014905	3,0240E+07	2,0126E+08	35079	1938810	588569	13886	0,637	0,750
91	0,013133	0,014839	2,6361E+07	1,8679E+08	39041	1934533	627976	14404	0,642	0,775
92	0,013385	0,014611	2,8528E+07	1,9900E+08	39999	1943135	578024	14814	0,629	0,776
93	0,013559	0,014585	2,8329E+07	1,9521E+08	34150	1904628	601639	12973	0,671	0,762
94	0,013323	0,015155	3,6202E+07	2,2021E+08	34451	1841378	583504	14361	0,667	0,732
95	0,01309	0,015002	3,3443E+07	2,1012E+08	38728	1969057	564714	15810	0,644	0,745
96	0,01327	0,015124	3,2615E+07	1,9054E+08	39285	1894233	550907	13756	0,665	0,755
97	0,013229	0,014887	2,5993E+07	2,2204E+08	34720	1900420	650424	15429	0,663	0,757
98	0,013413	0,015481	3,0112E+07	2,0901E+08	39540	1872738	553345	14557	0,668	0,746
99	0,013436	0,015326	3,0176E+07	2,1520E+08	38129	1977199	608004	15532	0,624	0,734
100	0,013201	0,015305	3,3044E+07	2,0462E+08	32862	2017497	602547	12789	0,670	0,779

SECÇÃO, DETERIORADA, SOBRE O PILAR P1.

Divisão dos domínios das variáveis relevantes.

i	A_p	A_s	E_c	E_s	f_c	f_{pu}	f_{sy}	P	y_p	y_s
1	0,007208	0,014291	24477844	1,79E+08	30299,85	1824376	509782,8	6932,37	0,616506	0,720837
2	0,007269	0,014411	25463519	1,83E+08	31463,12	1841378	524240,6	7128,977	0,621701	0,726911
3	0,007302	0,014476	25992510	1,85E+08	32087,41	1850503	531999,9	7234,492	0,624489	0,730171
4	0,007324	0,014521	26360585	1,87E+08	32521,8	1856852	537398,8	7307,91	0,626429	0,73244
5	0,007342	0,014556	26649179	1,88E+08	32862,39	1861831	541631,9	7365,475	0,62795	0,734218
6	0,007357	0,014585	26889564	1,89E+08	33146,09	1865977	545157,8	7413,423	0,629216	0,735699
7	0,00737	0,014611	27097345	1,9E+08	33391,3	1869561	548205,6	7454,868	0,630312	0,73698
8	0,007381	0,014633	27281512	1,91E+08	33608,65	1872738	550906,9	7491,603	0,631282	0,738115
9	0,007391	0,014654	27447739	1,91E+08	33804,83	1875605	553345,1	7524,759	0,632158	0,739139
10	0,007401	0,014672	27599853	1,92E+08	33984,35	1878229	555576,3	7555,101	0,63296	0,740076
11	0,007409	0,014689	27740565	1,92E+08	34150,41	1880657	557640,3	7583,168	0,633702	0,740943
12	0,007418	0,014705	27871867	1,93E+08	34305,37	1882921	559566,2	7609,358	0,634394	0,741753
13	0,007425	0,01472	27995269	1,93E+08	34451	1885050	561376,3	7633,972	0,635044	0,742513
14	0,007432	0,014735	28111945	1,94E+08	34588,7	1887063	563087,7	7657,245	0,635659	0,743232
15	0,007439	0,014748	28222828	1,94E+08	34719,56	1888975	564714,1	7679,362	0,636243	0,743915

16	0,007446	0,014761	28328670	1,95E+08	34844,47	1890801	566266,6	7700,474	0,636801	0,744567
17	0,007452	0,014774	28430088	1,95E+08	34964,16	1892551	567754,2	7720,704	0,637336	0,745192
18	0,007458	0,014785	28527597	1,96E+08	35079,24	1894233	569184,4	7740,153	0,63785	0,745793
19	0,007464	0,014797	28621629	1,96E+08	35190,21	1895855	570563,7	7758,909	0,638345	0,746373
20	0,007469	0,014808	28712552	1,96E+08	35297,52	1897423	571897,3	7777,045	0,638824	0,746933
21	0,007475	0,014819	28800679	1,97E+08	35401,52	1898943	573190	7794,623	0,639289	0,747476
22	0,00748	0,014829	28886285	1,97E+08	35502,55	1900420	574445,7	7811,699	0,63974	0,748004
23	0,007485	0,014839	28969607	1,97E+08	35600,88	1901857	575667,8	7828,319	0,640179	0,748517
24	0,00749	0,014849	29050855	1,98E+08	35696,77	1903259	576859,6	7844,525	0,640607	0,749018
25	0,007495	0,014859	29130212	1,98E+08	35790,43	1904628	578023,6	7860,354	0,641026	0,749507
26	0,0075	0,014869	29207845	1,98E+08	35882,05	1905967	579162,3	7875,839	0,641435	0,749985
27	0,007505	0,014878	29283900	1,99E+08	35971,8	1907279	580277,9	7891,009	0,641836	0,750454
28	0,007509	0,014887	29358510	1,99E+08	36059,86	1908566	581372,2	7905,891	0,642229	0,750914
29	0,007514	0,014896	29431794	1,99E+08	36146,34	1909830	582447,2	7920,509	0,642615	0,751365
30	0,007518	0,014905	29503861	2E+08	36231,39	1911073	583504,2	7934,883	0,642995	0,751809
31	0,007522	0,014913	29574810	2E+08	36315,13	1912297	584544,9	7949,035	0,643369	0,752247
32	0,007527	0,014922	29644733	2E+08	36397,65	1913503	585570,5	7962,983	0,643737	0,752678
33	0,007531	0,01493	29713714	2E+08	36479,06	1914693	586582,4	7976,742	0,644101	0,753103
34	0,007535	0,014939	29781830	2,01E+08	36559,44	1915868	587581,5	7990,329	0,64446	0,753522
35	0,007539	0,014947	29849154	2,01E+08	36638,9	1917029	588569	8003,757	0,644815	0,753937
36	0,007543	0,014955	29915752	2,01E+08	36717,49	1918178	589545,8	8017,041	0,645166	0,754348
37	0,007548	0,014963	29981688	2,02E+08	36795,31	1919315	590513	8030,193	0,645513	0,754754
38	0,007552	0,014971	30047021	2,02E+08	36872,41	1920442	591471,3	8043,225	0,645858	0,755157
39	0,007556	0,014979	30111808	2,02E+08	36948,87	1921560	592421,6	8056,147	0,646199	0,755556
40	0,00756	0,014987	30176100	2,02E+08	37024,75	1922669	593364,6	8068,971	0,646538	0,755952
41	0,007563	0,014995	30239949	2,03E+08	37100,1	1923770	594301,1	8081,707	0,646874	0,756345
42	0,007567	0,015002	30303403	2,03E+08	37174,99	1924865	595231,9	8094,364	0,647209	0,756736
43	0,007571	0,01501	30366508	2,03E+08	37249,46	1925953	596157,5	8106,951	0,647541	0,757125
44	0,007575	0,015018	30429309	2,03E+08	37323,58	1927036	597078,7	8119,478	0,647872	0,757512
45	0,007579	0,015025	30491850	2,04E+08	37397,39	1928115	597996	8131,953	0,648202	0,757898
46	0,007583	0,015033	30554172	2,04E+08	37470,94	1929190	598910,2	8144,384	0,64853	0,758282
47	0,007587	0,015041	30616316	2,04E+08	37544,28	1930262	599821,7	8156,779	0,648858	0,758665

48	0,00759	0,015048	30678323	2,04E+08	37617,46	1931332	600731,2	8169,147	0,649185	0,759047
49	0,007594	0,015056	30740233	2,05E+08	37690,52	1932400	601639,3	8181,496	0,649511	0,759428
50	0,007598	0,015063	30802084	2,05E+08	37763,51	1933467	602546,5	8193,833	0,649837	0,759809
51	0,007602	0,015071	30863916	2,05E+08	37836,49	1934533	603453,5	8206,167	0,650163	0,760191
52	0,007606	0,015078	30925767	2,05E+08	37909,48	1935600	604360,7	8218,504	0,650489	0,760572
53	0,00761	0,015086	30987677	2,06E+08	37982,54	1936668	605268,8	8230,853	0,650815	0,760953
54	0,007613	0,015094	31049684	2,06E+08	38055,72	1937738	606178,3	8243,221	0,651142	0,761335
55	0,007617	0,015101	31111828	2,06E+08	38129,06	1938810	607089,8	8255,616	0,65147	0,761718
56	0,007621	0,015109	31174150	2,06E+08	38202,61	1939885	608004	8268,047	0,651798	0,762102
57	0,007625	0,015116	31236691	2,07E+08	38276,42	1940964	608921,3	8280,522	0,652128	0,762488
58	0,007629	0,015124	31299492	2,07E+08	38350,54	1942047	609842,5	8293,049	0,652459	0,762875
59	0,007633	0,015132	31362597	2,07E+08	38425,01	1943135	610768,1	8305,636	0,652791	0,763264
60	0,007637	0,01514	31426051	2,07E+08	38499,9	1944230	611698,9	8318,293	0,653126	0,763655
61	0,00764	0,015147	31489900	2,08E+08	38575,25	1945331	612635,4	8331,029	0,653462	0,764048
62	0,007644	0,015155	31554192	2,08E+08	38651,13	1946440	613578,4	8343,853	0,653801	0,764444
63	0,007648	0,015163	31618979	2,08E+08	38727,59	1947558	614528,7	8356,775	0,654142	0,764843
64	0,007652	0,015171	31684312	2,08E+08	38804,69	1948685	615487	8369,807	0,654487	0,765246
65	0,007657	0,015179	31750248	2,09E+08	38882,51	1949822	616454,2	8382,959	0,654834	0,765652
66	0,007661	0,015187	31816846	2,09E+08	38961,1	1950971	617431	8396,243	0,655185	0,766063
67	0,007665	0,015195	31884170	2,09E+08	39040,56	1952132	618418,5	8409,671	0,65554	0,766478
68	0,007669	0,015204	31952286	2,1E+08	39120,94	1953307	619417,6	8423,258	0,655899	0,766897
69	0,007673	0,015212	32021267	2,1E+08	39202,35	1954497	620429,5	8437,017	0,656263	0,767322
70	0,007678	0,015221	32091190	2,1E+08	39284,87	1955703	621455,1	8450,965	0,656631	0,767753
71	0,007682	0,015229	32162139	2,1E+08	39368,61	1956927	622495,8	8465,117	0,657005	0,768191
72	0,007686	0,015238	32234206	2,11E+08	39453,66	1958170	623552,8	8479,491	0,657385	0,768635
73	0,007691	0,015247	32307490	2,11E+08	39540,14	1959434	624627,8	8494,109	0,657771	0,769086
74	0,007695	0,015256	32382100	2,11E+08	39628,2	1960721	625722,1	8508,991	0,658164	0,769546
75	0,0077	0,015266	32458155	2,12E+08	39717,95	1962033	626837,7	8524,161	0,658565	0,770015
76	0,007705	0,015275	32535788	2,12E+08	39809,57	1963372	627976,4	8539,646	0,658974	0,770493
77	0,00771	0,015285	32615145	2,12E+08	39903,23	1964741	629140,4	8555,475	0,659393	0,770982
78	0,007715	0,015295	32696393	2,13E+08	39999,12	1966143	630332,2	8571,681	0,659821	0,771483
79	0,00772	0,015305	32779715	2,13E+08	40097,45	1967580	631554,3	8588,301	0,66026	0,771996

80	0,007725	0,015315	32865321	2,13E+08	40198,48	1969057	632810	8605,377	0,660711	0,772524
81	0,007731	0,015326	32953448	2,14E+08	40302,48	1970577	634102,7	8622,955	0,661176	0,773067
82	0,007736	0,015337	33044371	2,14E+08	40409,79	1972145	635436,3	8641,091	0,661655	0,773627
83	0,007742	0,015349	33138403	2,14E+08	40520,76	1973767	636815,6	8659,847	0,66215	0,774207
84	0,007748	0,015361	33235912	2,15E+08	40635,84	1975449	638245,8	8679,296	0,662664	0,774808
85	0,007754	0,015373	33337331	2,15E+08	40755,53	1977199	639733,4	8699,526	0,663199	0,775433
86	0,007761	0,015386	33443172	2,16E+08	40880,44	1979025	641285,9	8720,638	0,663757	0,776085
87	0,007768	0,0154	33554055	2,16E+08	41011,3	1980937	642912,3	8742,755	0,664341	0,776768
88	0,007775	0,015414	33670731	2,17E+08	41149	1982950	644623,7	8766,028	0,664956	0,777487
89	0,007782	0,015429	33794133	2,17E+08	41294,63	1985079	646433,8	8790,642	0,665606	0,778247
90	0,007791	0,015445	33925435	2,18E+08	41449,59	1987343	648359,7	8816,832	0,666298	0,779057
91	0,007799	0,015462	34066147	2,18E+08	41615,65	1989771	650423,7	8844,899	0,66704	0,779924
92	0,007809	0,015481	34218261	2,19E+08	41795,17	1992395	652654,9	8875,241	0,667842	0,780861
93	0,007819	0,015501	34384488	2,19E+08	41991,35	1995262	655093,1	8908,397	0,668718	0,781885
94	0,00783	0,015523	34568655	2,2E+08	42208,7	1998439	657794,4	8945,132	0,669688	0,78302
95	0,007843	0,015549	34776437	2,21E+08	42453,91	2002023	660842,2	8986,577	0,670784	0,784301
96	0,007858	0,015578	35016821	2,22E+08	42737,61	2006169	664368,1	9034,525	0,67205	0,785782
97	0,007876	0,015613	35305415	2,23E+08	43078,2	2011148	668601,2	9092,09	0,673571	0,78756
98	0,007898	0,015658	35673490	2,25E+08	43512,59	2017497	674000,1	9165,508	0,675511	0,789829
99	0,007931	0,015723	36202481	2,27E+08	44136,88	2026622	681759,4	9271,023	0,678299	0,793089
100	0,007992	0,015843	37188156	2,31E+08	45300,15	2043624	696217,2	9467,63	0,683494	0,799163

Vectores de reordenação das variáveis anteriores.

<i>i</i>	Set-01	Set-02	Set-03	Set-04	Set-05	Set-06	Set-07	Set-08	Set-09	Set-10
1	43	98	71	89	50	89	89	89	19	57
2	89	79	29	54	9	19	75	6	51	71
3	4	36	90	2	7	59	79	11	94	19
4	14	51	57	13	19	56	51	87	33	29
5	13	9	60	97	5	100	5	22	45	98
6	26	48	42	29	47	63	68	37	75	84
7	10	14	52	39	42	12	90	71	60	10
8	92	8	33	5	27	23	53	3	71	66

9	74	44	25	76	67	53	21	16	28	21
10	37	86	58	14	40	17	32	82	85	14
11	58	31	97	66	56	29	18	63	95	9
12	78	94	37	70	32	71	82	27	86	89
13	85	38	48	7	11	90	6	68	99	42
14	23	60	65	3	98	92	19	34	57	39
15	63	4	4	65	80	87	12	18	50	36
16	71	30	45	27	21	34	10	78	36	17
17	33	83	68	61	61	14	55	98	56	75
18	82	88	55	31	71	4	48	73	92	67
19	86	1	99	78	52	22	13	44	49	48
20	11	42	50	62	6	68	54	15	52	28
21	15	59	26	28	62	69	8	8	59	47
22	93	18	5	98	74	82	61	21	13	23
23	47	32	16	91	63	86	22	19	80	34
24	62	33	3	53	84	74	39	70	24	40
25	25	55	47	75	4	33	64	42	90	51
26	27	87	70	96	89	31	36	36	25	46
27	8	96	67	46	46	62	97	1	72	58
28	31	45	34	80	2	73	100	10	35	27
29	41	53	24	11	44	38	40	64	38	94
30	5	23	94	4	93	11	95	17	89	92
31	80	70	98	83	48	3	44	58	26	1
32	34	5	9	41	8	72	62	83	44	59
33	30	72	11	99	39	25	37	28	43	33
34	90	62	20	9	34	5	26	99	67	64
35	36	7	84	60	3	26	30	49	88	6
36	46	84	56	50	64	48	66	54	12	41
37	44	58	19	18	10	40	24	76	68	100
38	77	74	40	90	41	2	7	81	69	26
39	19	27	49	40	51	7	2	60	41	5
40	45	82	51	42	26	81	71	5	96	96

41	51	85	91	44	57	16	27	69	46	12
42	9	21	75	34	100	13	57	100	20	4
43	57	95	66	43	70	9	3	75	66	72
44	65	93	87	63	49	58	70	26	7	52
45	95	29	21	52	16	46	25	48	5	80
46	96	19	89	77	79	99	69	31	15	8
47	55	20	73	94	28	28	93	92	9	74
48	81	99	82	15	91	18	76	38	10	76
49	75	17	22	35	78	65	65	91	23	63
50	97	24	74	12	99	1	52	29	83	13
51	94	69	8	21	58	88	67	61	6	65
52	68	49	79	64	43	52	17	84	70	16
53	20	13	38	20	82	32	78	80	2	99
54	12	28	41	10	54	66	35	46	53	18
55	3	81	78	87	29	37	50	65	78	70
56	28	57	31	85	60	24	49	9	65	56
57	54	3	72	45	94	6	96	33	82	30
58	50	25	77	1	53	64	11	62	74	49
59	61	77	76	81	92	20	98	41	30	62
60	87	63	27	51	69	10	72	14	14	20
61	91	80	63	72	18	83	15	88	34	97
62	98	75	13	82	22	36	80	79	31	3
63	21	50	46	74	81	43	58	93	62	55
64	52	89	85	23	77	60	94	7	4	2
65	16	46	64	73	13	41	1	50	93	31
66	2	66	88	38	76	76	81	52	100	78
67	56	47	32	58	88	15	31	45	84	43
68	22	35	44	48	75	78	41	24	91	79
69	100	39	80	100	59	85	92	51	73	68
70	99	65	69	67	85	42	29	67	42	85
71	84	91	61	49	96	80	60	90	17	90
72	59	56	53	55	30	8	20	47	54	50

73	6	10	81	16	31	27	34	39	32	73
74	67	22	15	56	12	44	99	56	55	88
75	76	68	1	17	17	96	56	25	48	7
76	48	26	59	92	35	51	42	2	63	53
77	72	15	10	26	86	67	23	4	18	24
78	40	6	14	69	20	54	45	13	3	60
79	32	64	83	84	55	97	16	95	87	87
80	24	12	18	36	24	79	91	66	37	35
81	70	100	95	19	1	30	73	53	98	38
82	66	11	30	37	25	39	4	59	1	81
83	64	97	86	88	66	91	83	32	29	91
84	73	52	23	30	14	84	77	43	58	86
85	79	76	17	32	23	49	43	30	39	11
86	18	73	6	79	38	50	88	55	64	61
87	53	78	54	24	87	94	47	86	40	32
88	38	2	62	86	73	55	28	77	11	83
89	60	67	28	47	95	98	87	72	16	69
90	35	34	93	57	65	95	74	85	79	22
91	88	61	2	95	97	45	14	20	8	77
92	49	43	7	8	45	57	84	35	97	25
93	83	90	43	68	33	70	46	40	76	44
94	42	71	92	93	15	61	59	74	21	82
95	1	92	12	33	68	77	38	23	81	45
96	17	54	96	71	37	47	63	96	61	37
97	39	37	36	59	36	35	9	97	47	93
98	69	40	35	22	72	21	86	57	22	95
99	29	16	100	25	83	93	33	94	27	54
100	7	41	39	6	90	75	85	12	77	15

Variáveis reordenadas:

i	A_p	A_s	E_c	E_s	f_c	f_{pu}	f_{sy}	P	y_p	y_s
1	0,007571	0,015658	3,2162E+07	2,1706E+08	37764	1985079	646434	8791	0,638	0,762
2	0,007782	0,015305	2,9432E+07	2,0588E+08	33805	1895855	626838	7413	0,650	0,768
3	0,007324	0,014955	3,3925E+07	1,8313E+08	33391	1943135	631554	7583	0,670	0,746
4	0,007432	0,015071	3,1237E+07	1,9344E+08	35190	1939885	603453	8743	0,644	0,751
5	0,007425	0,014654	3,1426E+07	2,2321E+08	32862	2043624	541632	7812	0,648	0,790
6	0,0075	0,015048	3,0303E+07	1,9929E+08	37544	1947558	619418	8030	0,659	0,775
7	0,007401	0,014735	3,0926E+07	2,0206E+08	37175	1882921	648360	8465	0,653	0,740
8	0,007809	0,014633	2,9714E+07	1,8796E+08	35972	1901857	605269	7234	0,657	0,766
9	0,007695	0,015018	2,9130E+07	2,1193E+08	39041	1936668	573190	7700	0,642	0,747
10	0,007548	0,015386	3,1299E+07	1,9392E+08	37025	1892551	585571	8641	0,663	0,743
11	0,007629	0,014913	3,5305E+07	2,0901E+08	38203	1909830	569184	8357	0,671	0,739
12	0,007715	0,015523	2,9982E+07	2,1012E+08	36398	1956927	635436	7891	0,664	0,778
13	0,007754	0,014971	3,0678E+07	1,8979E+08	34150	1987343	545158	8423	0,678	0,757
14	0,007485	0,01514	3,1750E+07	1,8529E+08	43513	1992395	570564	7990	0,652	0,756
15	0,007648	0,014521	2,6361E+07	2,0874E+08	40198	1980937	559566	7740	0,650	0,754
16	0,007682	0,014905	3,0492E+07	1,9869E+08	35402	1915868	555576	8572	0,645	0,745
17	0,007531	0,015349	3,1952E+07	2,0768E+08	38575	1887063	607090	9166	0,652	0,770
18	0,007736	0,015414	3,1112E+07	1,9988E+08	39369	1856852	600731	8494	0,668	0,766
19	0,007761	0,014291	3,6202E+07	2,1259E+08	37909	1900420	561376	8119	0,650	0,759
20	0,007409	0,015002	3,0802E+07	2,0794E+08	33146	1953307	606178	7679	0,650	0,751
21	0,007439	0,015132	2,9208E+07	1,9900E+08	38651	1954497	550907	7492	0,653	0,759
22	0,007819	0,014785	2,6649E+07	2,2471E+08	39628	1972145	612635	7795	0,635	0,749
23	0,007587	0,014922	2,8329E+07	2,1817E+08	38728	1979025	574446	7759	0,661	0,754
24	0,007644	0,01493	2,5993E+07	2,0563E+08	40636	1960721	592422	8451	0,641	0,756
25	0,007495	0,015101	3,0616E+07	2,1162E+08	32522	1914693	615487	8094	0,666	0,760
26	0,007505	0,0154	3,2091E+07	2,2204E+08	41295	1912297	589546	8017	0,641	0,758
27	0,007381	0,015578	3,1884E+07	2,0386E+08	37471	1946440	668601	6932	0,657	0,763
28	0,007522	0,015025	2,9782E+07	2,1328E+08	31463	1959434	696217	7555	0,645	0,750
29	0,007563	0,015086	2,9051E+07	1,9241E+08	37324	1920442	593365	8370	0,646	0,783
30	0,007342	0,014839	3,4569E+07	1,8679E+08	41991	1880657	660842	7721	0,666	0,781

31	0,007725	0,015221	3,5673E+07	2,1439E+08	37617	1850503	597079	8293	0,641	0,721
32	0,007535	0,014556	2,7448E+07	2,0258E+08	33609	1958170	613578	8660	0,648	0,763
33	0,007518	0,015238	2,7741E+07	2,2687E+08	36949	1904628	590513	7906	0,648	0,753
34	0,007791	0,015155	2,8713E+07	1,9121E+08	36559	1861831	579162	9271	0,656	0,765
35	0,007543	0,014611	3,3236E+07	2,0742E+08	32087	1905967	583504	8181	0,665	0,736
36	0,007583	0,015361	3,1174E+07	2,0487E+08	38805	1931332	617431	8243	0,634	0,756
37	0,007575	0,015124	2,8622E+07	1,9561E+08	33984	1922669	576860	8540	0,656	0,799
38	0,00771	0,015256	3,0176E+07	2,1759E+08	37100	1841378	548206	8623	0,656	0,750
39	0,007464	0,014878	3,0740E+07	2,0232E+08	37836	1869561	524241	8318	0,647	0,734
40	0,007579	0,015337	3,0864E+07	2,0284E+08	35882	1970577	622496	7365	0,672	0,786
41	0,007602	0,015373	3,4066E+07	2,0336E+08	38276	1890801	580278	8437	0,649	0,742
42	0,007391	0,014819	3,2458E+07	2,0072E+08	45300	1885050	608921	9468	0,639	0,732
43	0,007625	0,015549	3,1817E+07	2,0310E+08	39285	1875605	532000	8524	0,655	0,769
44	0,007657	0,015501	3,3554E+07	2,0820E+08	37691	1942047	621455	7876	0,630	0,761
45	0,007843	0,014896	2,8801E+07	2,0538E+08	34844	1929190	578024	8169	0,628	0,773
46	0,007858	0,014797	3,3794E+07	2,1226E+08	40097	2026622	620429	7949	0,636	0,738
47	0,007617	0,014808	3,2307E+07	2,2021E+08	36060	1908566	655093	8875	0,632	0,770
48	0,007731	0,015723	3,3044E+07	1,9437E+08	41616	1894233	627976	8043	0,633	0,770
49	0,0077	0,014774	2,8886E+07	2,0099E+08	39999	1949822	616454	8845	0,640	0,765
50	0,007876	0,014849	3,2382E+07	1,9294E+08	44137	1824376	604361	7921	0,662	0,743
51	0,00783	0,015212	2,7282E+07	1,9672E+08	38351	1982950	618419	8331	0,629	0,766
52	0,007669	0,015056	3,2780E+07	2,0847E+08	37249	1935600	567754	8679	0,657	0,745
53	0,007469	0,01472	3,0047E+07	1,9636E+08	40410	1913503	630332	8605	0,622	0,793
54	0,007418	0,014887	3,0240E+07	1,9183E+08	38056	1950971	588569	8144	0,651	0,746
55	0,007302	0,015326	3,2696E+07	2,1608E+08	36146	1919315	602547	8383	0,660	0,768
56	0,007509	0,015116	2,9575E+07	2,1520E+08	38500	1903259	601639	7525	0,655	0,762
57	0,007613	0,014476	3,2234E+07	2,0361E+08	42209	1865977	664368	7977	0,662	0,752
58	0,007598	0,014859	3,2615E+07	1,7912E+08	37983	1948685	557640	8344	0,658	0,759
59	0,00764	0,015285	3,2536E+07	2,1364E+08	41795	1897423	674000	8082	0,643	0,764
60	0,007768	0,015163	2,9284E+07	2,0513E+08	39202	1878229	623553	7657	0,636	0,747
61	0,007799	0,015315	3,1619E+07	2,1071E+08	35079	1973767	564714	8766	0,644	0,788
62	0,007898	0,015266	2,7995E+07	2,1401E+08	35503	1918178	632810	8588	0,643	0,730

63	0,007475	0,015063	3,0554E+07	2,1131E+08	40302	1925953	609842	8908	0,654	0,762
64	0,007606	0,015429	3,3337E+07	1,9741E+08	39903	1944230	657794	7455	0,626	0,727
65	0,007446	0,015033	3,1684E+07	2,1100E+08	34451	1923770	509783	8194	0,669	0,752
66	0,007269	0,015187	3,3671E+07	2,0180E+08	39810	1963372	634103	8219	0,683	0,771
67	0,007621	0,015041	2,9645E+07	2,0690E+08	41149	1888975	584545	8132	0,663	0,757
68	0,00748	0,014947	3,0429E+07	2,0437E+08	39718	1966143	594301	7845	0,667	0,772
69	0,007992	0,014979	3,2865E+07	2,3088E+08	38425	1977199	652655	8206	0,658	0,767
70	0,007931	0,015179	3,2021E+07	2,0928E+08	40756	1924865	582447	8410	0,647	0,775
71	0,007748	0,015462	3,1490E+07	2,0462E+08	42738	1969057	611699	8817	0,637	0,779
72	0,007633	0,015109	3,0988E+07	2,0614E+08	36231	1872738	571897	8157	0,651	0,760
73	0,007357	0,014672	3,2953E+07	1,9480E+08	36315	1907279	587581	8056	0,644	0,769
74	0,007665	0,014829	2,8223E+07	2,0639E+08	34305	1927036	681759	8268	0,651	0,777
75	0,007705	0,015204	2,4478E+07	1,9521E+08	34964	2006169	608004	7860	0,649	0,737
76	0,00759	0,014869	3,1363E+07	2,1879E+08	36639	1934533	595232	7129	0,654	0,761
77	0,007686	0,014748	2,7600E+07	1,9838E+08	40880	1952132	575668	7308	0,638	0,749
78	0,00756	0,014585	2,8112E+07	2,0984E+08	35298	1937738	597996	7634	0,624	0,764
79	0,007527	0,015171	3,3138E+07	2,1479E+08	38129	2011148	566267	8987	0,664	0,777
80	0,00749	0,014705	2,8528E+07	2,0126E+08	35697	1967580	650424	8396	0,646	0,754
81	0,007678	0,015843	3,4776E+07	1,9599E+08	30300	1911073	624628	8231	0,676	0,755
82	0,007661	0,014689	2,9504E+07	2,0153E+08	35790	1921560	537399	8306	0,617	0,773
83	0,007652	0,015613	3,3443E+07	2,1656E+08	38961	1989771	636816	7963	0,643	0,780
84	0,007691	0,015078	2,8970E+07	1,9959E+08	34589	1975449	629140	8107	0,652	0,776
85	0,00772	0,015275	2,8430E+07	2,0016E+08	35601	1932400	596158	7935	0,646	0,741
86	0,007458	0,015247	2,6890E+07	2,1293E+08	36872	1933467	644624	8256	0,654	0,764
87	0,00761	0,015295	3,1050E+07	1,9774E+08	41011	1998439	599822	8721	0,647	0,753
88	0,007552	0,014411	3,1554E+07	2,1563E+08	39540	1938810	581372	8555	0,634	0,774
89	0,007637	0,015195	2,9359E+07	2,0412E+08	42454	2017497	642912	8479	0,637	0,767
90	0,007539	0,014939	3,4384E+07	2,0664E+08	38883	2002023	625722	8700	0,660	0,748
91	0,007775	0,015147	2,5464E+07	2,2106E+08	43078	1928115	563088	7777	0,631	0,771
92	0,007594	0,01501	2,7097E+07	1,9054E+08	37397	1940964	638246	8004	0,674	0,750
93	0,007742	0,015445	3,0367E+07	2,0956E+08	36479	1955703	598910	8069	0,659	0,758
94	0,007567	0,015229	3,4218E+07	2,1946E+08	34720	1945331	610768	8509	0,639	0,774

95	0,007208	0,015481	2,7872E+07	2,0044E+08	39121	1964741	591471	7828	0,661	0,758
96	0,007452	0,015094	3,5017E+07	2,1041E+08	36795	1930262	614529	9035	0,653	0,755
97	0,007556	0,014963	2,9916E+07	2,0716E+08	36717	1917029	553345	9092	0,649	0,782
98	0,007673	0,014987	2,9849E+07	1,9707E+08	39454	1898943	641286	8281	0,640	0,784
99	0,007514	0,014761	3,7188E+07	1,9807E+08	40521	1995262	586582	8945	0,642	0,761
100	0,00737	0,014995	3,0112E+07	1,8894E+08	41450	1962033	639733	7609	0,659	0,744